TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

RONI TOIVONEN

HYPERREAALILUVUT JA EPÄSTANDARDI ANALYYSI

Diplomityö

Tarkastaja: Prof. Esko Turunen
Tarkastaja ja aihe hyväksytty
Luonnontieteiden tiedekuntaneuvoston
kokouksessa 4.11.2015

TIIVISTELMÄ

RONI TOIVONEN Hyperreaaliluvut ja epästandardi analyysi:
Tampereen teknillinen yliopisto
Diplomityö, 60 sivua, 5 liitesivua
Marraskuu 2015
Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma
Pääaine: Matematiikka
Tarkastajat: Prof. Esko Turunen
Avainsanat: Hyperreaaliluvut, epästandardit reaaliluvut, infinitesimaalit, epästandardi analyysi

Hyperreaalilukujen systeemi on reaalilukujen systeemin laajennus, mikä sisältää äärettömiä ja infinitesimaalisia lukuja. Ääretön luku on itseisarvoltaan suurempi kuin mikään reaaliluku ja infiniteismaaliluku on itseisarvoltaan pienempi kuin mikään positiivinen reaaliluku. Hyperreaaliluvuilla on ollut iso rooli matematiikan historiassa, mutta niille onnistuttiin luomaan täsmällinen pohja vasta 1960-luvulla.

Tässä diplomityössä konstruoidaan hyperreaalilukujen systeemi, ja näytetään, kuinka matemaattisia objekteja, kuten lukuja, joukkoja ja relaatioita, voidaan siirtää reaalilukujen struktuurista hyperreaalilukujen struktuuriin. Työssä esitetään siirtoperiaate, jonka avulla voidaan siirtää reaalilukujen struktuurista matemaattisia objekteja käsitteleviä tosia lauseita hyperreaalilukujen struktuuriin vastaavia matemaattisia objekteja käsitteleviksi tosiksi lauseiksi.

Lisäksi tutustutaan epästandradiin analyysiin, missä reaalianalyysin peruskäsitteille, kuten jonojen suppenemiselle, joukkojen avoimuudelle, funktioiden jatkuvuudelle ja funktioiden derivaatoille, määritellään perinteisen määritelmän kanssa ekvivalentti epästandardi määritelmä. Näiden uusien määritelmien ja hyperreaalilukujen ominaisuuksien avulla voidaan esitellä ja todistaa reaalianalyysin tuloksia.

ABSTRACT

RONI TOIVONEN: Hyperreal Numbers and Nonstandard Analysis
Tampere University of Technology
Master of Science Thesis, 60 pages, 5 Appendix pages
November 2015
Master's Degree Programme in Science and Engineering
Major: Mathematics
Examiner: Prof. Esko Turunen
Keywords: Hyperreal numbers, Nonstandard reals, Infinitesimals, Nonstandard analysis

The system of hyperreal numbers is an extension of the system of real numbers that contains infinite and infinitesimal numbers. The absolute value of an infinite number is greater than any real number and the absolute value of an infinitesimal number is smaller than any positive real number. Hyperreal numbers have been playing a big role in the history of the mathematics, but it was not until 1960s that they were proven to be logically consistent.

In this masters thesis the system of hyperreal numbers will be constructed. We will show how to transfer various mathematical objects such as numbers, sets and realtions from the structure of real numbers to the structure of hyperreal numbers. We will also introduce the transfer principle which states that all the true statements of our language concerning mathematical objects in the structure of the real numbers can be transformed to statements concerning corresponding mathematical objects in the structure of the hyperreal numbers which are also true.

We will apply nonstandard analysis to standard real analysis by introducing nonstandard equivalents to standard definitions such as convergence of sequences, openness of sets, continuity of functions and differentiability of functions. The nonstandard definitions can then be applied to produce and proof statements of the real numbers.

ALKUSANAT

Työ tehtiin Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan laitoksella. Kiitän ohjaajaani professori Esko Turusta mielenkiintoisesta aiheesta ja työn ohjauksesta. Kiitän lisäksi ystäviäni ja perhettäni saamastani kannustuksesta työtä tehdessä.

Tampere, 09.11.2015

Roni Toivonen

SISÄLLYS

LYHENTEET JA MERKINNÄT

${}^*x$	Reaaliluvun x siirto hyperreaaliluvuksi
${}^*A$	Reaalilukujoukon A siirto hyperreaalilukujoukoksi
${}^*P$	Reaalilukujoukon relaation P siirto hyperreaalilukujen relaatioksi
${}^*f$	Reaalilukujoukon funktion f siirto hyperreaalilukujen funktioksi
${}^*\Phi$	Kielen $L_{\mathscr{S}}$ lauseen Φ siirto kielen $L_{*\mathscr{S}}$ lauseeksi
${}^*A_\infty$	Joukon ${}^*A$ äärettömät alkiot
$\equiv$	Ekvivalenssirelaatio joukossa $\hat{R}$
$\emptyset$	Tyhjä joukko
$\rightarrow, \wedge, \vee, \neg$	Loogisia konnektiiveja
$\forall$	Kaikilla-kvanttori
$\exists$	Olemassaolokvanttori
$(A)_*$	Reaalisten hyperreaalilukujen joukko
$L_{\mathscr{S}}$	Symbolinen kieli relationaaliselle systeemille $\mathscr{S}$
$\mathcal{P}(S)$	Joukon S potenssijoukko
$\mathscr{S}$	Relationaalinen systeemi
Ψ	Skolemfunktio
$\hat{R}$	Äärettömän pitkien reaalilukujen jono
$\boldsymbol{\mathbb{R}}$	Hyperreaalilukujen joukko
${}^*\mathbb{R}$	Hyperreaalilukujen joukko
$\mathcal{R}$	Järjestetty kunta $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$
$\boldsymbol{\mathcal{R}}$	Järjestetty kunta $(\boldsymbol{\mathbb{R}}, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{\cdot}, \boldsymbol{v})$
${}^*\mathcal{R}$	Järjestetty kunta $(\boldsymbol{\mathbb{R}}, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{\cdot}, \boldsymbol{v})$
$\mathcal{U}$	Suodatin
$x \simeq y$	Luku x ja y ovat infinitesimaalisen lähellä toisiaan
$x \sim y$	Luku x ja y ovat äärellisen lähellä toisiaan
$dom(f)$	Funktion f määrittelyjoukko
$G(x)$	Luvun x galaksi
l.k.	Lähes kaikkialla
$m(x)$	Luvun x monadi
$range(f)$	Funktion f arvojoukko
st	Standardiosafunktio

1. JOHDANTO

Äärettömyys, millä tarkoitetaan sekä äärettömän suuria että äärettömän pieniä lukuja, on ollut matematiikan historiassa vaikea ja ristiriitaisia tunteita herättävä käsite. Kreikan kielessä sana *apeiron* merkitsee ääretöntä. Kirjaimellisesti käännettynä se merkitsee rajatonta, mutta se merkitsee myös ääretöntä, epämääräistä ja määrittelemätöntä. Sana liittyy negatiivinen konnotaatio, mikä kuvaa antiikin kreikkalaisten suhtautumista äärettömyyteen. Pythagoraan luonnollisiin lukuihin perustuva maailmankuva romahti, kun eräs hänen oppilaansa todisti, ettei neliön halkaisijaa voida ilmoittaa kahden luonnollisen luvun suhteena. Ratkaisuksi tähän Pythagoralaiset kehittelivät käsitteen nimeltä monadi, jota voidaan pitää ensimmäisenä infinitesimaalilukuna.

Vaikka infinitesimaalien käsite oli loogisesti kyseenalainen ja paradokseja herättävä, ne olivat silti käyttökelpoisia tietyissä sovelluksissa. Esimerkiksi Arkhimedes laskiessaan kappaleiden tilavuuksia ja aloja jakoi kappaleita äärettömän ohuisiin siivuihin. Infinitesimaalit sopivat hyvin ongelmiin, jotka olivat luonteeltaan jatkuvia, ja niitä on käytetty läpi matematiikan historian.

1600-luvun jälkipuoliskolla matemaatikko Isaac Newton, ja hieman myöhemmin, tosin Newtonin toeriaan tutustumatta, matemaatikko Gottfried Wilhelm Leibniz kehittelivät differentiaali- ja integraalilaskennan teoriaa. Newton oli epävarma teorian perustuksesta. Välillä hän puhui infinitesimaaleista, välillä rajoista ja toisinaan myös fysikaalisista intuitioista. Leibniz oli sen sijaan luottavaisempi esitellessään infinitesimaalin dx käsitettä määritellessään funktion $f(x)$ derivaatan

$$f'(x) = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}. \tag{1.1}$$

Infinitesimaali dx oli hänen mukaansa positiivinen elementti, mikä on pienempi kuin mikään muu positiivinen luku. Silti se on kuitenkin merkittävästi suurempi kuin nolla, joten sillä voidaan jakaa, ja sille voidaan suorittaa normaaleja aritmeettisia operaatioita. Infinitesimaalit olivat Leibniz mukaan ideaalisia elementtejä, eikä esimerkiksi imaginaarilukujen kaltaisia lukuja.

Koska infinitesimaalilukujen käsite ei ollut tarkasti määritelty, matemaatikoiden keskuudessa ei vallinnut yksimielisyyttä siitä, onko niitä edes soveliasta käyttää. Silti niiden käyttö näytti antavan oikeita vastauksia. Muun muassa markiisi Guillaume de l'Hôpital sitoutui johdonmukaisesti Leibnizin teoriaan, ja kirjoitti ensimmäisen oppikirjan infinitesimaaleista vuonna 1696. Infiniteimaalilaskennan kehitys jatkui koko 1700-luvun ajan, mutta koska Leibniz ja hänen seuraajansa eivät onnistuneet luomaan täsmällisesti määriteltyä systeemiä, missä olisi ollut normaalien äärellisten numeroiden lisäksi äärettömän suuria sekä äärettömän pieniä numeroita, sai infinitesimaalien käsite osakseen voimistuvaa kritiikkiä. Yhden tunnetuimmista kriittisistä puheenvuoroista käytti piispa G. Berkeley vuonna 1734, kun hän kirjoituksessaan kritisoi infinitesimaalien epätäydellisesti määriteltyä käsitettä. Hänen mukaansa matemaatikoiden kuuluisi edustaa eksaktia tiedettä, ja kutsui infinitesimaaleja pilkallisesti *poismenneiden suureiden haamuksi.*

Kritiikki oli täysin aiheellista, sillä määritelmä sisälsi ristiriitoja. Tarkastellaan esimerkiksi funktiota $f(x) = x^2$, jonka derivaatan tiedetään olevan $f'(x) = 2x$. Kuitenkin kaavan 1.1 mukaan

$$f'(x) = \frac{(x + dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{x^2 + 2xdx + dx^2 - x^2}{dx} = 2x + dx, \qquad (1.2)$$

joten $2x = 2x + dx$, eli $dx = 0$. Tämä on tietysti ristiriita, sillä infinitesimaalin dx täytyy olla aidosti suurempi kuin nolla.

1800-luvulla matemaatikkojen d'Alembert, Cauchy ja Weierstrass kehittelemä raja-arvoteoria vei voiton infinitesimaaleista, ja analyysissä epätäsmälliset infinitesimaalit korvattiin täsmällisellä raja-arvon käsitteellä. Tästä huolimatta infinitesimaalin käsite säilyi, tosin niiden rooli kutistui lähinnä ajattelua tukeviksi käsitteiksi. Koska infinitesimaalit ovat varsin intuitiivisia, niin niiden avulla on helppo havainnollistaa raja-arvoon liittyviä käsitteitä. Esimerkiksi edellä mainittu derivaatan käsite on helpompi sisäistää infinitesimaalien avulla kuin raja-arvojen avulla ϵ, δ -tekniikkaa käytteäen.

Infinitesimaalit jatkoivat ajattelua tukevan työkalun roolissa aina 1960-luvulle saakka, jolloin matemaatikko Abraham Robinson esitteli ensimmäistä kertaa historiassa täsmällisen määtitelmän infinitesimaaliluvuille. Hän käytti tuoretta 1950-luvulla kehitettyä matemaattisen logiikan osa-aluetta, malliteoriaa, ja laajensi reaalilukujen joukon hyperreaalilukujen joukoksi, joka sisälsi reaalilukujen lisäksi myös äärettömiä ja infinitesimaalisia lukuja. Uusi laajennettu systeemi peri (lähes) kaikki reaalilukujen systeemin ominaisuudet ja alkeisfunktiot. Loogisen siirtoperiaatteen avulla olioita voitiin siirtää reaalilukujen systeemistä laajennettuun systeemiin, ja näin ollen perinteisiä ongelmia voitiin tutkia uudessa hyperreaalilukuja sisältävässä systeemissä.

Tässä työssä pyritään esittelemään lyhyehkö ja helposti ymmärrettävä johdatus hyperreaalilukuihin ja epästandardiin analyysiin. Tavoitteena on, että lukijan kiinnostus aiheeseen herää, ja hän huomaa sen hyödyllisyyden. Lukijalta vaaditaan algebran ja analyysin perusasioiden tietämystä.

Aloitetaan työ konstruoimalla hyperreaalilukujen systeemi luvussa 2. Kolmannessa luvussa näytetään, miten reaalilukuihin liittyvät lauseet voidaan siirtää hyperreaalilukuihin. Neljännessä luvussa tutustutaan tarkemmin hyperreaalilukujen ominaisuuksiin. Viides luku käsittelee epästandardia analyysiä, eli miten reaalianalyysissä voidaan hyödyntää hyperreaalilukuja. Työn pääasiallisena lähteenä on käytetty kirjaa *An Introduction to Nonstandard Real Analysis* ([1]), ja luvut 2-5 seuraavat kirjan ensimmäisen luvun rakennetta. Todistuksia on lisätty ja täydennetty, ja selitystä ja esimerkkejä on lisätty. Lisäksi lukuja 2-5 on täydennetty käyttäen lähteitä [2], [3], [5]. Luvussa 1 on käytetty lähteitä [4], [6], [7].

2. HYPERREAALILUKUJEN KONSTRUKTOINTI

Tässä luvussa konstruoidaan hyperreaalilukujen systeemi. Se on reaalilukujen laajennus, joka sisältää kaikkien tavanomaisten reaalilukujen lisäksi myös äärettömän suuria ja äärettömän pieniä lukuja. Luodaan struktuuri $\boldsymbol{\mathcal{R}} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <)$, joka on järjestetty kunta.

2.1 Ultrasuodatin

Aloitetaan määrittelemällä matemaattinen objekti nimeltä ultrasuodatin, jonka avulla hyperreaalilukujen konstruktio tapahtuu.

Määritelmä 2.1. Olkoon I jokin epätyhjä joukko. Joukon I *suodatin* (filter) on potenssijoukon $\mathcal{P}(S)$ epätyhjä osajoukko $\mathcal{U}$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(i) Tyhjä joukko $\emptyset \notin \mathcal{U}$.

(ii) Jos A, $B \in \mathcal{U}$, niin $A \cap B \in \mathcal{U}$.

(iii) Jos $A \in \mathcal{U}$ ja $I \supseteq B \supseteq A$, niin $B \in \mathcal{U}$.

Suodatin $\mathcal{U}$ on *ultrasuodatin* (ultrafilter), jos

(iv) Jokaisella osajoukolla $A \subseteq I$ joko $A \in \mathcal{U}$ tai joukon A komplementti $A' = I - A \in \mathcal{U}$.

Seuraavia suodattimen ominaisuuksista johtuvia tuloksia tullaan tarvitsemaan useasti tässä työssä, joten todistetaan ne tässä.

Apulause 2.1. *Olkoon $\mathcal{F}$ joukon I suodatin. Tällöin $I \in \mathcal{F}$.*

Todistus. Määritelmän 2.1 mukaan suodatin on epätyhjä, joten siihen kuuluu vähintään yksi joukko A. Kohdan (iii) mukaan myös joukko I kuuluu suodattimeen $\mathcal{F}$, koska $I \supseteq A$. □

Apulause 2.2. *Olkoon $\mathcal{U}$ joukon I ultrasuodatin ja $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq I$ äärellinen määrä joukkoja siten, että $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = I$ ja $A_i \cap A_j = \emptyset$ kaikilla $i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$. Tällöin täsmälleen yksi joukoista $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kuuluu ultrasuodattimeen $\mathcal{U}$.*

Todistus. Jos yksikään joukoista $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ei kuulu ultrasuodattimeen $\mathcal{U}$, niin ultrasuodattimen määritelmän 2.1 kohdan (iv) nojalla $A_1', A_2', \ldots, A_n' \in \mathcal{U}$, jolloin kohdan (ii) nojalla myös $A_1' \cap A_2' \cap \cdots \cap A_n' = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)' = I' = \emptyset \in \mathcal{U}$. Tämä on ristiriidassa kohdan (i) kanssa, joten vähintään yhden joukoista $A_1, A_2, \ldots, A_n$ täytyy kuulua ultrasuodattimeen $\mathcal{U}$. Oletetaan seuraavaksi, että joukko $A_1 \in \mathcal{U}$. Jos myös jokin muu joukko $A_k \in \mathcal{U}, 2 \leq k \leq n$, niin kohdan (ii) nojalla $A_1 \cap A_k = \emptyset \in \mathcal{U}$, mikä on jälleen ristiriidassa kohdan (i) kanssa. Siis täsmälleen yksi joukoista $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kuuluu ultrasuodattimeen $\mathcal{U}$. □

Hyperreaalilukujen konstruktiossa käytettävä ultrasuodatin on vapaa. Tarkistellaan ultrasuodattimen vapauden määrittelyä varten äärettömän joukon I osajoukkojen joukkoa $\mathcal{F}_I = \{A \subseteq I : I - A \text{ on äärellinen}\}$.

Lause 2.1. *Olkoon I ääretön joukko. Joukko $\mathcal{F}_I = \{A \subseteq I : I - A \text{ on äärellinen}\}$ on joukon I suodatin.*

Todistus. Osoitetaan, että määritelmän 2.1 kohdat (i)-(iii) pätevät.

(i) Tyhjä joukko $\emptyset \notin \mathcal{F}_I$, koska $\emptyset' = I$ on ääretön.

(ii) Jos $A, B \in \mathcal{F}_I$, niin $(A \cap B)' = A' \cup B'$ on kahden äärellisen joukon yhdisteenä äärellinen, eli $A \cap B \in \mathcal{F}_I$.

(iii) Jos $A \in \mathcal{F}_I$ ja $I \supseteq B \supseteq A$, niin $A' \supseteq B'$, ja B' on äärellinen. Tällöin siis $B \in \mathcal{F}_I$.

□

Määritelmä 2.2. Olkoon I ääretön joukko. Joukon I suodatinta $\mathcal{F}_I = \{A \subseteq I : I - A \text{ on äärellinen}\}$ kutsutaan *Fréchetin* suodattimeksi. Joukon I ultrasuodatin $\mathcal{U}$ on *vapaa* (free), jos se sisältää Fréchetin suodattimen $\mathcal{F}_I$.

Lause 2.2. *Jokaisella äärettömällä joukolla on olemassa vapaa ultrasuodatin.*

Todistus. Todistus löytyy liitteestä A. □

Todistetaan vielä yksi tulevaisuudessa tarpeellinen vapaaseen ultrasuodattimeen liittyvä ominaisuus.

Apulause 2.3. *Vapaaseen ultrasuodattimeen ei voi kuulua äärellisiä joukkoja.*

Todistus. Jos vapaaseen ultrasuodattimeen voisi kuulua äärellinen joukko, niin silloin myös sen komplementti kuuluisi ultrasuodattimeen, sillä komplementin komplementti olisi myös äärellinen. Ultrasuodattimen määritelmän 2.1 kohdan (ii) nojalla joukon ja sen komplementin leikkaus, eli tyhjä joukko, kuuluisi myös ultrasuodattimeen, mikä olisi ristiriidassa kohdan (i) kanssa. □

2.2 Hyperreaalilukujen struktuuri

Aloitetaan konstruktio määrittelemällä joukko $\hat{R}$, jonka alkiot ovat äärettömän pituisia reaalilukujonoja.

Määritelmä 2.3. Joukko $\hat{R}$ on kaikkien äärettömän pitkien reaalilukujonojen joukko, ja sen alkiot ovat muotoa $r = \langle r_1, r_2, r_3, \dots \rangle = \langle r_i : i \in N \rangle = \langle r_i \rangle$. Määritellään binäärioperaatiot *summa* $\oplus$ ja *tulo* $\odot$ joukossa $\hat{R}$ seuraavasti:

(i) $r \oplus s = \langle r_i \rangle \oplus \langle s_i \rangle = \langle r_1 + s_1, r_2 + s_2, r_3 + s_3, \dots \rangle$,

(ii) $r \odot s = \langle r_i \rangle \odot \langle s_i \rangle = \langle r_1 \cdot s_1, r_2 \cdot s_2, r_3 \cdot s_3, \dots \rangle$.

Esitellään seuraavaksi ekvivalenssirelaatio $\equiv$ joukossa $\hat{R} \times \hat{R}$. Valitaan luonnollisten lukujen joukosta $\mathbb{N}$ jokin vapaa ultrasuodatin $\mathcal{U}$, jonka avulla määrittely tapahtuu. Tätä menetelmää kutsutaan *ultrapotenssimenetelmäksi* (ultrapower).

Määritelmä 2.4. Olkoon $r = \langle r_i \rangle$, $s = \langle s_i \rangle \in \hat{R}$. Tällöin $r \equiv s$, joss $\{i \in \mathbb{N} : r_i = s_i\} \in \mathcal{U}$. Sanotaan, että $\langle r_i \rangle = \langle s_i \rangle$ *lähes kaikkialla* (almost everywhere), eli $\langle r_i \rangle = \langle s_i \rangle$ l.k.

Esimerkki 2.1. Olkoon $k \in \mathbb{N}$ ja $\langle r_i \rangle \in \hat{R}$, missä $r_i = 1$, kun $i \leq k$, ja $r_i = 0$ muuten.

(a) $\langle r_i \rangle \equiv \langle 0, 0, 0, \dots \rangle$, sillä joukko $\{i \in \mathbb{N} : r_i = 0\} \in \mathcal{U}$, koska $\mathcal{U}$ on vapaa ja $\{i \in \mathbb{N} : r_i = 0\}'$ on äärellinen (mahtavuus = k). $\langle r_i \rangle = \langle 0, 0, 0, \dots \rangle$ lähes kaikkialla, eli $\langle r_i \rangle = -\langle 0, 0, 0, \dots \rangle$ l.k.

(b) $\langle r_i \rangle \not\equiv \langle 1, 1, 1, \dots \rangle$, koska äärellinen joukko $\{i \in \mathbb{N} : r_i = 1\}$ (mahtavuus = k) ei voi apulauseen 2.3 nojalla kuulua vapaaseen ultrasuodattimeen.

(c) Tarkastellaan vielä tapausta $\langle s_i \rangle \in \hat{R}$, missä $s_i = 1$, kun i on parillinen, ja $s_i = 0$ muuten. Nyt sekä joukko $\{i \in \mathbb{N} : s_i = 0\}$ että joukko $\{i \in \mathbb{N} : s_i = 0\}'$ ovat äärettömiä. Se, onko $\langle s_i \rangle \equiv \langle 0, 0, 0, \dots \rangle$, riippuu nyt ultrasuodattimen $\mathcal{U}$ valinnasta. Koska $\{i \in \mathbb{N} : s_i = 0\}' = \{i \in \mathbb{N} : s_i = 1\}$, niin määritelmän 2.1 kohdan (iv) nojalla toinen joukoista kuuluu ultrasuodattimeen, eli joko $\langle s_i \rangle \equiv \langle 0, 0, 0, \dots \rangle$ tai $\langle s_i \rangle \equiv \langle 1, 1, 1, \dots \rangle$.

Lause 2.3. *Relaatio $\equiv$ on ekvivalenssirelaatio joukossa $\hat{R}$.*

Todistus. Olkoon $r = \langle r_i \rangle, s = \langle s_i \rangle, t = \langle t_i \rangle \in \hat{R}$. Apulauseen 2.1 mukaan $\{i \in \mathbb{N} : r_i = r_i\} = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$, joten relaatio $\equiv$ on refleksiivinen.

Jos $r \equiv s$, niin $\{i \in \mathbb{N} : r_i = s_i\} \in \mathcal{U}$. Koska relaatio $=$ on symmetrinen joukossa $\mathbb{R}$, niin myös $\{i \in \mathbb{N} : s_i = r_i\} \in \mathcal{U}$, eli $s \equiv r$, joten relaatio $\equiv$ on symmetrinen.

Jos $r \equiv s$ ja $s \equiv t$, niin $\{i \in \mathbb{N} : r_i = s_i\} \in \mathcal{U}$ ja $\{i \in \mathbb{N} : s_i = t_i\} \in \mathcal{U}$. Määritelmän 2.1 kohdan (ii) mukaan $\{i \in \mathbb{N} : r_i = s_i\} \cap \{i \in \mathbb{N} : s_i = t_i\} \in \mathcal{U}$, ja kohdan (iii) mukaan $\{i \in \mathbb{N} : r_i = s_i\} \cap \{i \in \mathbb{N} : s_i = t_i\} \subseteq \{i \in \mathbb{N} : r_i = s_i = t_i\} \in \mathcal{U}$, eli $r \equiv t$, joten relaatio $\equiv$ on myös transitiivinen. $\square$

Määritellään nyt hyperreaalilukujen joukko $\mathbf{R}$ relaation $\equiv$ ekvivalenssiluokkien avulla samaan tapaan, kuin reaaliluvut määritellään rationaalisten Cauchy-jonojen ekvivalenssiluokkina.

Määritelmä 2.5. Merkitään symbolilla $\mathbb{R}$ kaikkien joukon $\hat{R}$ relaation $\equiv$ ekvivalenssiluokkien joukkoa. Ekvivalenssiluokkaa $[s]$, mikä sisältää jonon $s \in \hat{R}$, merkitään symbolilla $\mathbf{s}$. Joukon $\mathbb{R}$ alkioita kutsutaan *hyperreaaliluvuiksi.*

Hyperreaalilukujen peruslaskutoimitukset määritellään seuraavasti.

Määritelmä 2.6. Olkoon $\mathbf{r} = [\langle r_i \rangle]$ ja $\mathbf{s} = [\langle s_i \rangle]$. Tällöin

(i) $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s} = [\langle r_i + s_i \rangle]$, eli $[r] + [s] = [r \oplus s]$,

(ii) $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s} = [\langle r_i \cdot s_i \rangle]$, eli $[r] \cdot [s] = [r \odot s]$,

(iii) $\boldsymbol{r} < \boldsymbol{s} (\boldsymbol{s} > \boldsymbol{r})$, joss $\{i \in N : r_i < s_i\} \in \mathcal{U}$,

(iv) $\boldsymbol{r} \leq \boldsymbol{s} (\boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{r})$, joss $\boldsymbol{r} < \boldsymbol{s}$ tai $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{s}$.

Merkitään struktuuria $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ symbolilla $\boldsymbol{\mathcal{R}}$. Näytetään seuraavaksi, että edellä esitetyt operaatiot ovat hyvin määriteltyjä.

Apulause 2.4. *Operaatiot $+$, $-$ ja $<$ ovat hyvin määriteltyjä, eli ne ovat riippumattomia ekvivalenssiluokkien edustajien valinnasta.*

Todistus. Olkoon $r = [\langle r_i \rangle], s = [\langle s_i \rangle], r' = [\langle r'_i \rangle], s' = [\langle s'_i \rangle] \in \mathbb{R}$, $r \equiv r'$ ja $s \equiv s'$. Tällöin $\{i \in \mathbb{N} : r_i = r'_i\} \in \mathcal{U}$ ja $\{i \in \mathbb{N} : s_i = s'_i\} \in \mathcal{U}$. Lausekkeen

$$\{i \in \mathbb{N} : r_i + s_i = r'_i + s'_i\} \supseteq \{i \in \mathbb{N} : r_i = r'_i\} \cap \{i \in \mathbb{N} : s_i = s'_i\} \tag{2.1}$$

oikea puoli kuuluu ultrasuodattimeen $\mathcal{U}$ määritelmän 2.1 kohdan (ii) nojalla, joten vasen puoli kuuluu myös ultrasuodattimeen $\mathcal{U}$ saman määritelmän kohdan (iii) nojalla, joten $r \oplus s \equiv r' \oplus s'$, eli $[r \oplus s] = [r' \oplus s']$. Samankaltaisen päättelyn avulla voidaan muodostaa lauseke

$$\{i \in \mathbb{N} : r_i \cdot s_i = r'_i \cdot s'_i\} \supseteq \{i \in \mathbb{N} : r_i = r'_i\} \cap \{i \in \mathbb{N} : s_i = s'_i\}, \tag{2.2}$$

jonka avulla voidaan päätellä, että $[r \odot s] = [r' \odot s']$. Koska

$$\{i \in \mathbb{N} : r_i < s_i\} \supseteq \{i \in \mathbb{N} : r'_i < s'_i\} \cap \{i \in \mathbb{N} : r_i = r'_i\} \cap \{i \in \mathbb{N} : s_i = s'_i\} \tag{2.3}$$

ja

$$\{i \in \mathbb{N} : r'_i < s'_i\} \supseteq \{i \in \mathbb{N} : r_i < s_i\} \cap \{i \in \mathbb{N} : r_i = r'_i\} \cap \{i \in \mathbb{N} : s_i = s'_i\}, \quad (2.4)$$

niin voidaan jälleen päätellä, että $[r'] < [s']$, joss $[r] < [s]$. $\square$

Edellä esitetty hyperreaalilukujen struktuuri on järjestetty kunta.

Lause 2.4. *Struktuuri* $\boldsymbol{\mathcal{R}} = (\mathbb{R}, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{\cdot}, \boldsymbol{<})$ *on järjestetty kunta.*

Todistus. Olkoon $\boldsymbol{r} = [r], \boldsymbol{s} = [s], \boldsymbol{t} = [t] \in \mathbb{R}$. Osoitetaan, että kunta-aksioomat pätevät käyttämällä nolla-alkiona $\mathbf{0} = [0] = [\langle 0, 0, \dots \rangle]$ ja ykkösalkiona $\mathbf{1} = [1] = [\langle 1, 1, \dots \rangle]$.

1. $\boldsymbol{r}\boldsymbol{+}(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{t}) = [r] + ([s] + [t]) = [r] + [s \oplus t] = [r \oplus (s \oplus t)] = [(r \oplus s) \oplus t] = [r \oplus s] \oplus [t] = ([r] + [s]) \oplus [t] = ([r] + [s]) + [t] = (\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s})\boldsymbol{+}\boldsymbol{t}$
2. $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s} = [r] + [s] = [r \oplus s] = [s \oplus r] = [s] + [r] = \boldsymbol{s}+\boldsymbol{r}$
3. $\boldsymbol{r}+\mathbf{0} = [r] + [0] = [r \oplus 0] = [r] = \boldsymbol{r}$
4. Olkoon $-\boldsymbol{r} = [\langle -r_i \rangle]$. $\boldsymbol{r}\boldsymbol{+}(-\boldsymbol{r}) = [r] + [-r] = [r \oplus (-r)] = [0] = \mathbf{0}$
5. $\boldsymbol{r}\boldsymbol{\cdot}(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{t}) = [r] \cdot ([s] \cdot [t]) = [r] \cdot [s \odot t] = [r \odot (s \odot t)] = [(r \odot s) \odot t] = [r \odot s] \odot [t] = ([r] \cdot [s]) \odot [t] = ([r] \cdot [s]) \cdot [t] = (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s})\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{t}$
6. $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s} = [r] \cdot [s] = [r \odot s] = [s \odot r] = [s] \cdot [r] = \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{r}$
7. $\boldsymbol{r}\cdot\mathbf{1} = [r] \cdot [1] = [r \odot 1] = [r] = \boldsymbol{r}$
8. $\boldsymbol{r}\boldsymbol{\cdot}(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{t}) = [r] \cdot ([s] + [t]) = [r] \cdot [s \oplus t] = [r \odot (s \oplus t)] = [(r \odot s) \oplus (r \odot t)] = [r \odot s] + [r \odot t] = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{t}$
9. Jos $\boldsymbol{r} \neq \mathbf{0}$, niin $\{i \in \mathbb{N} : r_i = 0\} \notin \mathcal{U}$. Ultrasuodattimen määritelmän 2.1 kohdan (iv) mukaan $\{i \in \mathbb{N} : r_i \neq 0\} \in \mathcal{U}$. Määritellään $\boldsymbol{r}^{-1} = [\langle r'_i \rangle]$, missä $r'_i = r_i^{-1}$ jos $r_i \neq 0$, ja $r'_i = 0$, jos $r_i = 0$. Koska $\{i \in \mathbb{N} : r_i \cdot r'_i = 1\} = \{i \in \mathbb{N} : r_i \neq 0\} \in \mathcal{U}$, niin $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}^{-1} = \mathbf{1}$.
10. Määritelmän 2.1 kohdan (i) mukaan $\{i \in \mathbb{N} : 1 = 0\} = \emptyset \notin \mathcal{U}$, joten $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$.

Alkio $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}$ on positiivinen, jos $\boldsymbol{r} > \mathbf{0}$, ja negatiivinen, jos $\boldsymbol{r} < \mathbf{0}$. Merkitään joukon $\mathbb{R}$ positiivisia alkioita symbolilla $\mathbb{R}^+$, ja negatiivisia alkioita symbolilla $\mathbb{R}^-$. Osoitetaan seuraavaksi, että $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ on järjestetty kunta, eli se toteuttaa seuraavat järjestysaksioomat:

1. Olkoon $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^+$, eli $\{i \in \mathbb{N} : r_i > 0\}, \{i \in \mathbb{N} : s_i > 0\} \in \mathcal{U}$. Tällöin lausekkeen

$$\{i \in \mathbb{N} : r_i + s_i > 0\} \supseteq \{i \in \mathbb{N} : r_i > 0\} \cap \{i \in \mathbb{N} : s_i > 0\} \tag{2.5}$$

   oikea puoli kuuluu määritelmän 2.1 kohdan (ii) nojalla ultrasuodattimeen $\mathcal{U}$, jolloin myös kohdan (iii) mukaan vasen puoli kuuluu siihen, eli $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^+$.

2. Vastaavalla tavalla lausekkeesta

$$\{i \in \mathbb{N} : r_i \cdot s_i > 0\} \supseteq \{i \in \mathbb{N} : r_i > 0\} \cap \{i \in \mathbb{N} : s_i > 0\} \tag{2.6}$$

   voidaan päätellä, että $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^+$.

3. Olkoon $\boldsymbol{r} = [\langle r_i \rangle] \in \mathbb{R}^+$, $A = \{i \in \mathbb{N} : r_i < 0\}$, $B = \{i \in \mathbb{N} : r_i = 0\}$ ja $C = \{i \in \mathbb{N} : r_i > 0\}$. Reaalilukujen trikotomian ja apulauseen 2.1 perusteella $A \cup B \cup C = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$. Koska reaalilukujen trikotomian mukaan joukot A, B ja C ovat erillisiä, niin apulauseen 2.2 nojalla täsmälleen yksi joukoista A, B, C kuuluu ultrasuodattimeen $\mathcal{U}$. Jokainen elementti $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}$ on siis joko positiivinen, negatiivinen tai nolla.

□

Määritelmä 2.7. Alkion $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}$ *itseisarvo* määritellään seuraavasti

$$|\boldsymbol{r}| = \begin{cases} \boldsymbol{r} & \text{jos } \boldsymbol{r} > \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{jos } \boldsymbol{r} = \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{r} & \text{jos } \boldsymbol{r} < \mathbf{0}. \end{cases} \tag{2.7}$$

2.3 Reaalilukujen ja reaalilukujoukkojen *-siirto

Näytetään seuraavaksi, että struktuuri $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ sisältää isomorfisen kopion struktuurista $\mathcal{R}$.

Määritelmä 2.8. Määritellään funktio $* : \mathbb{R} \to \mathbf{R}$ kaavalla

$$*(r) = [\langle r, r, \ldots \rangle] \tag{2.8}$$

kaikille $r \in \mathbb{R}$. Merkitään $[\langle r, r, \ldots \rangle] = {}^*r$.

Lause 2.5. *Funktio * on järjestyksen säilyttävä injektiivinen homomorfismi joukosta $\mathbb{R}$ joukkoon $\mathbf{R}$.*

Todistus. Funktio * on homomorfismi, sillä kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ pätee

1. ${}^*(x+y) = [\langle x+y, x+y, \ldots \rangle] = [\langle x, x, \ldots \rangle] \mathbin{\mathbf{+}} [\langle y, y, \ldots \rangle] = {}^*(x) \mathbin{\mathbf{+}} {}^*(y)$,
2. ${}^*(x \cdot y) = [\langle x \cdot y, x \cdot y, \ldots \rangle] = [\langle x, x, \ldots \rangle] \mathbin{\boldsymbol{\cdot}} [\langle y, y, \ldots \rangle] = {}^*(x) \mathbin{\boldsymbol{\cdot}} {}^*(y)$,
3. ${}^*(1) = [\langle 1, 1, \ldots \rangle] = \mathbf{1}$.

Lisäksi homomorfismi * on injektiivinen, sillä kaikilla erisuurilla reaaliluvuilla x ja y pätee ${}^*(x) = [\langle x, x, \ldots \rangle] \neq [\langle y, y, \ldots \rangle] = {}^*(y)$, koska $\{i \in \mathbb{N} : x = y\} = \emptyset \notin \mathcal{U}$ ultrasuodattimen määritelmän 2.1 nojalla, eli $\langle x, x, \ldots \rangle \not\equiv \langle y, y, \ldots \rangle$.

Funktio * säilyttää myös järjestyksen, sillä kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$, joilla $x < y$, pätee ${}^*(x) = [\langle x, x, \ldots \rangle] \mathbin{\mathbf{<}} [\langle y, y, \ldots \rangle] = {}^*(y)$, koska apulauseen 2.1 nojalla $\{i \in \mathbb{N} : x < y\} = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$. $\square$

Määritellään seuraavaksi funktion $*\colon A \to (A)_*$ maalijoukko $(A)_*$ ja se, millainen objekti on reaalilukujoukon $A \subseteq \mathbb{R}$ *-siirto ${}^*A$.

Määritelmä 2.9. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$. Tällöin $(A)_*$ on kaikkien alkioiden ${}^*a$ joukko, missä $a \in A$.

Määritelmä 2.10. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$. Tällöin ${}^*A$ on joukko $\{[\langle x_i \rangle] \in \mathbf{R} : \{i \in \mathbb{N} : x_i \in A\} \in \mathcal{U}\}$.

Seuraavaksi todistetaan, että mikäli joukko $A \subseteq \mathbb{R}$ on äärettömän kokoinen, niin joukko ${}^*A$ on aidosti suurempi kuin joukko $(A)_*$.

Lause 2.6. *Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$. $(A)_* \subseteq {}^*A$, ja $(A)_* = {}^*A$, joss A on äärellinen joukko.*

Todistus. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$ ja $\boldsymbol{x} = [\langle x_i \rangle] \in (A)_*$. On siis olemassa luku $x \in A$ siten, että $\{i \in \mathbb{N} : x_i = x\} \in \mathcal{U}$. Koska $\{i \in \mathbb{N} : x_i = x \in A\} \in \mathcal{U}$, niin $\boldsymbol{x} \in {}^*A$, eli $(A)_* \subseteq {}^*A$.

Olkoon $(A)_* = {}^*A$. Jos joukko A on ääretön, niin voidaan valita $\boldsymbol{x} = [\langle x_i \rangle] \in \mathbf{R}$ siten, että kaikilla $i, j \in \mathbb{N}$ pätee $x_i, x_j \in A$ ja $x_i \neq x_j$ kaikilla $i \neq j$. Koska $\{i \in \mathbb{N} : x_i \in A\} = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$, niin $\boldsymbol{x} \in {}^*A$. Tällöin kaikilla $x \in \mathbb{R}$ joukossa $\{i \in \mathbb{N} : x_i = x\}$ on korkeintaan yksi alkio, ja koska $\mathcal{U}$ on vapaa ultrasuodatin, niin ääretön joukko $\mathbb{N} - \{i \in \mathbb{N} : x_i = x\} \in \mathcal{U}$. Mutta koska ultrasuodattimen määritelmän 2.1 nojalla mikään joukko ja sen komplementti eivät voi kuulua samaan aikaan ultrasuodattimeen, niin $\{i \in \mathbb{N} : x_i = x\} \notin \mathcal{U}$, eli $\boldsymbol{x} \notin (A)_*$, mikä on ristiriita. Siis joukon A tulee olla äärellinen.

Olkoon sitten $A = \{a_1, a_2, \dots a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ äärellinen joukko ja $\boldsymbol{x} = [\langle x_i \rangle] \in {}^*A$. Tällöin $\{i \in \mathbb{N} : x_i \in A\} = \{i \in \mathbb{N} : x_i = a_1\} \cup \{i \in \mathbb{N} : x_i = a_2\} \cup \dots \cup \{i \in \mathbb{N} : x_i = a_n\} \in \mathcal{U}$. Koska $\{i \in \mathbb{N} : x_i \in A\}' \cup \{i \in \mathbb{N} : x_i = a_1\} \cup \{i \in \mathbb{N} : x_i = a_2\} \cup \dots \cup \{i \in \mathbb{N} : x_i = a_n\} = \mathbb{N}$, niin apulauseen 2.2 nojalla täsmälleen yksi joukoista $\{i \in \mathbb{N} : x_i = a_1\}, \{i \in \mathbb{N} : x_i = a_2\}, \dots, \{i \in \mathbb{N} : x_i = a_n\}$ kuuluu ultrasuodattimeen $\mathcal{U}$, eli $\boldsymbol{x} \in (A)_*$. Siis $(A)_* = {}^*A$. □

Joukko $(A)_*$ on siis reaalilukujoukon $A \subseteq \mathbb{R}$ kuva hyperreaalilukujen joukossa $\mathbf{R}$. Samaistetaan joukko A joukon $(A)_*$ kanssa. Samaistus voidaan tehdä, sillä jokaista joukon A alkiota vastaa yksikäsitteinen joukon $(A)_*$ alkio. Joukko $(\mathbb{R})_*$ on siis reaalilukujen joukko hyperreaalilukujen joukossa $\mathbf{R}$. Hyperreaalilukujen joukko $\mathbf{R}$ on siis edellä todistetun lauseen nojalla aidosti suurempi kuin reaalilukujen joukko $(\mathbb{R})_*$. Esimerkiksi luku $[\langle 1, 2, 3, \dots \rangle]$ ei ole mikään reaaliluku ${}^*r = [\langle r, r, r, \dots \rangle]$, sillä korkeintaan yhden luonnollisen luvun sisältämä joukko $\{i \in \mathbb{N} : i = r\}$ ei voi äärellisenä joukkona apulauseen 2.3 nojalla kuulua vapaaseen ultrasuodattimeen $\mathcal{U}$, joten $[\langle 1, 2, 3, \dots \rangle] \neq [\langle r, r, r, \dots \rangle]$. Luvussa 4 tullaan määrittelemään luku $[\langle 1, 2, 3, \dots \rangle]$ äärettömän suureksi hyperreaaliluvuksi.

Voidaan siis puhua reaalilukujen *laajennuksesta* hyperreaalilukujen joukoksi. Samaten joukon A *-siirto ${}^*A$ on joukon A laajennus. Näytetään vielä, että ainoat reaalilukujoukon $A \subseteq \mathbb{R}$ laajennuksen ${}^*A$ reaaliluvut (reaaliluvut samaistettiin joukon $(\mathbb{R})_*$ kanssa) ovat joukon A alkioita (joukko A siis samaistettiin joukon $(A)_*$ kanssa).

Lause 2.7. *Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$. Tällöin ${}^*A \cap \mathbb{R} = A$.*

Todistus. Koska $A \subseteq \mathbb{R}$ ja lauseen 2.6 nojalla $A \subseteq {}^*A$, niin $A \subseteq {}^*A \cap \mathbb{R}$. Olkoon $x \in {}^*A \cap \mathbb{R}$. Tällöin $x \in \mathbb{R}$, eli x on muotoa $[\langle x, x, x, \dots \rangle]$. Määritelmän 2.10 mukaan $x \in {}^*A$ vain, jos $\{i \in \mathbb{N} : x \in A\} \in \mathcal{U}$, eli jos $x \in A$. □

2.4 Relaatioiden ja funktioiden *-siirto

Funktio $*$ siis siirtää reaaliluvut hyperreaaliluvuiksi ja reaalilukujoukot hyperreaalilukujoukoiksi. Laajennetaan tätä siirtoa käsittämään myös n-paikkaisia relaatioita, eli määritellään $*$-siirto, joka kuvaa reaalilukujen n-paikkaisen relaation hyperreaalilukujen n-paikkaiseksi relaatioksi.

Määritelmä 2.11. Olkoon P n-paikkainen relaatio joukossa $\mathbb{R}$. Relaation P $*$-siirto $*P$ joukossa $\mathbf{R}^n$ on kaikkien n-jonojen $\langle \boldsymbol{r}^1, \boldsymbol{r}^2, \dots, \boldsymbol{r}^n \rangle$ joukko, joille pätee: jos $\boldsymbol{r}^k = [\langle r_1^k, r_2^k, \dots \rangle], 1 \leq k \leq n$, niin $P\langle r_i^1, r_i^2, \dots, r_i^n \rangle$ lähes kaikkialla, eli $\{i \in \mathbb{N} : P\langle r_i^1, r_i^2, \dots, r_i^n \rangle\} \in \mathcal{U}$.

Apulause 2.5. *Joukko $*P$ on hyvin määritelty.*

Todistus. Jos $[\langle r_i^k \rangle] = [\langle \overline{r}_i^k \rangle], k = 1, 2, \dots, n$, ja $A = \{i \in \mathbb{N} : P\langle r_i^1, r_i^2, \dots, r_i^n \rangle\} \in \mathcal{U}$, niin joukko $B = \{i \in \mathbb{N} : r_i^k = \overline{r}_i^k\} \in \mathcal{U}$ relaation $\equiv$ määritelmän 2.4 nojalla ja $P\langle \overline{r}_i^1, \dots, \overline{r}_i^n \rangle$ kaikilla $i \in A \cap B$, joten $A \cap B \subset \{i \in \mathbb{N} : P\langle \overline{r}_i^1, \dots, \overline{r}_i^n \rangle\}$. Koska ultrasuodattimen määritelmän 2.1 nojalla $A \cap B \in \mathcal{U}$, niin edelleen saman määritelmän mukaan $\{i \in \mathbb{N} : P\langle \overline{r}_i^1, \dots, \overline{r}_i^n \rangle\} \in \mathcal{U}$. □

Määritelmä 2.10 on edellä esitetyn relaation *-siirron erikoistapaus, sillä joukkoon kuulumista voidaan pitää yksipaikkaisena relaationa. Merkitään esimerkiksi luonnollisten lukujen joukkoa $\mathbb{N}$ relaatiolla $N = \{i \in \mathbb{N} : i\}$. Tällöin ${}^*N = \{[\langle x_i \rangle] \in \mathbf{R} : \{i \in \mathbb{N} : x_i \in N\} \in \mathcal{U}\}$, mikä on identtinen yllä olevan relaation *-siirron määritelmän kanssa.

Lause 2.8. *Olkoon P n-paikkainen relaatio joukossa $\mathbb{R}$ ja $P\langle r^1, \dots, r^n \rangle$, missä $r^k \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq n$. Tällöin ${}^*P\langle {}^*r^1, \dots, {}^*r^n \rangle$.*

Todistus. $\langle {}^*r^1, \dots, {}^*r^n \rangle = \langle [\langle r^1, r^1, \dots \rangle], \dots [\langle r^n, r^n, \dots \rangle] \rangle = \langle \underline{r}^1, \dots \underline{r}^n \rangle$, missä $\underline{r}^k = [\langle r^k, r^k, \dots \rangle], 1 \leq k \leq n$. $\{i \in \mathbb{N} : P\langle r^1, \dots, r^n \rangle\} = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$, eli ${}^*P\langle {}^*r^1, \dots, {}^*r^n \rangle$. □

Todistetaan edellisen lauseen avulla seuraava funktion f määrittelyjoukkoa $dom(f)$ ja arvojoukkoa $range(f)$ käsittelevä tulos.

Lause 2.9. *Olkoon* $f : dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to range(f) \subseteq \mathbb{R}$. *Tällöin*

(i) $^*(dom(f)) = dom(^*f)$,

(ii) $^*(range(f)) = range(^*f)$.

Todistus. Funktio f on kaksipaikkainen relaatio joukossa $dom(f) \times range(f)$. Merkitään $f\langle x, y\rangle$, jos $f(x) = y$.

(i) Jos luku x kuuluu funktion f määrittelyjoukkoon, niin on olemassa luku y siten, että $f\langle x, y\rangle$. Tällöin edellisen lauseen mukaan $^*f\langle ^*x, ^*y\rangle$, joten luku $^*x$ kuuluu funktion $^*f$ määrittelyjoukkoon.

(ii) Jos luku y kuuluu funktion f arvojoukkoon, niin on olemassa luku x siten, että $f\langle x, y\rangle$. Tällöin edellisen lauseen mukaan $^*f\langle ^*x, ^*y\rangle$, joten luku $^*y$ kuuluu funktion $^*f$ arvojoukkoon.

□

Esimerkki 2.2. (a) Funktio f, jolla on n muuttujaa, on n+1-paikkainen relaatio. Jos $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y$, niin merkitään $f\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, y\rangle$. Lisäksi jos $f\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1\rangle$ ja $f\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, y_2\rangle$, niin $y_1 = y_2$.

(b) Olkoon $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y$, eli $f\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, y\rangle$. Tällöin $^*f\langle ^*x_1, ^*x_2, \ldots, ^*x_n, ^*y\rangle$, eli $^*f(^*x_1, ^*x_2, \ldots, ^*x_n) = {}^*y$

(c) Funktio + on kahden muuttujan funktio. Olkoon $a + b = c$, eli $+\langle a, b, c\rangle$. Koska $^* + \langle ^*a, ^*b, ^*c\rangle$, eli $[\langle a, a, a, \ldots\rangle]^* + [\langle b, b, b, \ldots\rangle] = [\langle c, c, c, \ldots\rangle] = [\langle a + b, a + b, a + b, \ldots\rangle]$, niin relaatio $^*+$ voidaan samaistaa määritelmän 2.6 relaation $\mathbf{+}$ kanssa. Samaten relaatiot $^*\cdot$ ja $^* <$ voidaan samaistaa relaatioiden $\boldsymbol{\cdot}$ ja $\mathbf{<}$ kanssa.

(d) $^*(A \cap B) = {}^*A \cap {}^*B$, sillä $^*(A \cap B) = \{^*x \in {}^*\mathbb{R} : x \in A \cap B\} = \{^*x \in {}^*\mathbb{R} : x \in A\} \cap \{^*x \in {}^*\mathbb{R} : x \in B\} = {}^*A \cap {}^*B$. Vastaavalla tavalla voidaan päätellä, että $^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B$.

(e) Olkoon P n-paikkainen relaatio ja

$$\chi_P(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 \text{ jos } \langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in P \\ 0 \text{ jos } \langle x_1, \ldots, x_n\rangle \notin P \end{cases} \tag{2.9}$$

sen karakteristinen funktio. Olkoon $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ mielivaltainen n-jono. Jos $P\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, niin $^*P\langle ^*x_1, \ldots, ^*x_n \rangle$, joten $^*\chi_P(^*x_1, \ldots, ^*x_n) = 1$. Koska $^*P\langle ^*x_1, \ldots, ^*x_n \rangle$, niin myös $\chi_{^*P}(^*x_1, \ldots, ^*x_n) = 1$. Jos $P'\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, niin $^*P'\langle ^*x_1, \ldots, ^*x_n \rangle$, joten $^*\chi_P(^*x_1, \ldots, ^*x_n) = 0$. Koska $^*P'\langle ^*x_1, \ldots, ^*x_n \rangle$, niin myös $\chi_{^*P}(^*x_1, \ldots, ^*x_n) = 0$. Siis $^*\chi_P = \chi_{^*P}$.

Otetaan seuraavat merkintätavat käyttöön ilmaisujen yksinkertaistamiseksi.

Merkintä 2.1.

- *Merkitään joukkoa $\mathbf{R}$ symbolilla $^*\mathbb{R}$ ja struktuuria $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ symbolilla $^*\mathcal{R}$.*
- *Merkitään sekä joukon $\mathbb{R}$ että joukon $^*\mathbb{R}$ alkioita pienillä kirjaimilla $r, s, \ldots$. Alkioiden esiintymispaikasta pystytään päättelemään kumpaan joukkoon se kuuluu.*
- *Joukko $X \subseteq \mathbb{R}$ samaistetaan joukon $(X)_*$ kanssa. Esimerkiksi siis joukko $\mathbb{R}$ samaistetaan joukon $(\mathbb{R})_*$ kanssa.*
- *Merkitään numeroita tavanomaiseen tapaan kaikissa struktuureissa. Merkitään esimerkiksi 1, eikä ^{*1}, $\mathbf{1}$ tai $[\langle 1, 1, 1, \ldots \rangle]$.*
- *Käytetään symboleita $+$, $\cdot$ ja $<$ symboleiden $\mathbf{+}$, $\boldsymbol{\cdot}$, $\mathbf{<}$, $^*+$, $^*\cdot$ ja $^*<$ sijaan.*

3. SIIRTOPERIAATE

Edellisessä luvussa nähtin, miten hyperreaalilukujen struktuurin $^*\mathcal{R}$ järjestettynä kuntana oleminen periytyi reaalilukujen struktuurista $\mathcal{R}$. Samaten esitettiin, miten erilaiset matemaattiset objektit, kuten luvut, lukujoukot, funktiot ja relaatiot siirretään reaalilukujen puolelta hyperreaalilukujen struktuuriin. Jotta tämä siirto olisi järkevä, niin siirrettävien funktioiden ja relaatioiden tulisi olla saman kaltaisia molemmissa struktuureissa. Toisin sanottuna, jos siirrettävään objektiin liittyy jokin säännönmukaisuus reaalisella puolella, vastaava sääntö pitäisi löytyä myös hyperreaalilukujen puolella. Esimerkiksi jaksollisen reaalifunktion tulee olla myös jaksollinen hyperreaalilukujen puolella.

Tätä varten tässä luvussa kehitellään formaali kieli, jonka avulla voidaan esittää säännönmukaisuuksia matemaattisista objekteista struktuureissa $\mathcal{R}$ ja $^*\mathcal{R}$. Luvussa määritellään *-siirto lauseille, jonka avulla voidaan siirtää tiettyjä matemaattisia objekteja käsittelevän reaalisen kielen lause hyperreaalilukujen kielen vastaavia matemaattisia hyperreaalisia objekteja käsitteleväksi lauseeksi. Lisäksi esitetään siirtoperiaate, jonka mukaan reaalisen lauseen ollessa tosi myös vastaava siirretty hyperreaalilukuja koskeva lause on tosi.

3.1 Symbolinen kieli $L_{\mathscr{S}}$ relationaaliselle systeemille $\mathscr{S}$

Lähdetään konstruoimaan kyseistä kieltä, ja määritellään sitä varten struktuuri nimeltä relationaalinen systeemi:

Määritelmä 3.1. *Relationaalinen systeemi* on struktuuri $\mathscr{S} = (S, \{P_i : i \in I\}, \{f_j : j \in J\})$, mikä koostuu joukosta S, joukosta joukon S relaatioita P_i ja joukosta joukon S funktioita f_j.

Määritellään seuraavaksi relationaaliseen systeemiin $\mathscr{S}$ liittyvä symbolinen kieli $L_{\mathscr{S}}$.

Määritelmä 3.2. Kielen $L_{\mathscr{S}}$ aakkosto koostuu seuraavista symboleista:

- konnektiiveistä $\wedge$ ja $\rightarrow$,
- kvanttoreista $\forall$,
- sulkeista $[,], (,), \langle, \rangle$,
- muuttujasymboleista $x_1, x_2, \ldots$,
- vakiosymboleista $\underline{s}, s \in S$,
- relaatiosymboleista $\underline{P}, P \in P_i$ ja
- funktiosymboleista $\underline{f}, f \in f_j$.

Alleviivattua symbolia $\underline{s}$ kutsutaan alkion $s \in S$ nimeksi. Vastaavasti symbolit $\underline{P}$ ja $\underline{f}$ ovat alkioiden $P \in P_i$ ja $f \in f_j$ nimiä.

Aakkosto on normaalin predikaattilogiikan aakkoston riisuttu versio, ja siitä puuttuu muun muassa tavanomainen olemassaolokvanttori $\exists$ ja disjunktio $\vee$. Edellä esitetylle suppeammalle kielelle on yksinkertaisempi muodostaa siirtoperiaate, ja se riittää hyvin tämän työn puitteissa. Rikkaampi kieli ja yleisempi siirtoperiaate löytyy esimerkiksi kirjasta [1].

Jatketaan kielen konstruktiota määrittelemällä kielen termit ja lauseet seuraavasti.

Määritelmä 3.3. Kielen $L_{\mathscr{S}}$ *termit* (term):

- Jokainen muuttujasymboli ja vakiosymboli on termi.
- Jos $\underline{f}$ on n-paikkaisen funktiosymbolin nimi ja $\tau^1, \ldots, \tau^n$ ovat termejä, niin $\underline{f}(\tau^1, \ldots, \tau^n)$ on termi.

Termiä, jossa ei ole muuttujia, kutsutaan *vakiotermiksi* (constant term).

Määritelmä 3.4. Kielen $L_{\mathscr{S}}$ *lauseet* (simple sentence):

- $\underline{P}\langle\tau^1, \ldots, \tau^n\rangle$ on lause, missä $\underline{P}$ on n-paikkaisen relaation nimi ja $\tau^1, \ldots, \tau^n$ ovat vakiotermejä.

- Ilmaisu
$$(\forall x_1)\dots(\forall x_n)[\wedge_{i=1}^{k}\underline{P}_i\langle\tilde{\tau}_i\rangle \to \wedge_{j=1}^{l}\underline{Q}_j\langle\tilde{\sigma}_j\rangle] \tag{3.1}$$
on lause, missä $\wedge_{i=1}^{k}\underline{P}_i = \underline{P}_1\wedge\cdots\wedge\underline{P}_k$, $\wedge_{j=1}^{l}\underline{Q}_j = \underline{Q}_1\wedge\cdots\wedge\underline{Q}_l$, $\tilde{\tau}_i = \langle\tau_i^1,\dots,\tau_i^{n_i}\rangle$, $\tilde{\sigma}_j = \langle\sigma_i^1,\dots,\sigma_i^{n_j}\rangle$ ja $\tau_i^1,\dots,\tau_i^{n_i},\sigma_i^1,\dots,\sigma_i^{n_j}$ ovat termejä, jotka eivät sisällä muita muuttujia kuin $x_1,\dots,x_n$. P_i on n_i-paikkaisen relaation nimi ja Q_j n_j-paikkaisen relaation nimi.

Esimerkki 3.1. Tarkastellaan relationaalista systeemiä $\mathscr{S} = (\mathbb{R}, \{=,\leq,\neq\}, \{+,\cdot\})$, ja siihen liittyvää kieltä $L_{\mathscr{S}}$.

(a) $2x^2 + y$ on termi, joka voidaan ilmaista täsmällisemmin $\underline{+}(\underline{\cdot}(\underline{2},\underline{\cdot}(x,x)),y)$.

(b) Termi 2π on vakiotermi, joka voidaan ilmaista täsmällisemmin $\underline{\cdot}(\underline{2},\underline{\pi})$.

(c) Ilmaisu
$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[\underline{R}\langle x\rangle \wedge \underline{R}\langle y\rangle \wedge \underline{R}\langle z\rangle \wedge x\underline{\leq}y \to x\underline{+}z\underline{\leq}y\underline{+}z] \tag{3.2}$$
on lause, missä R on yksipaikkainen relaatio, ja $R\langle a\rangle$, joss a on reaaliluku.

(d) Ilmaisu
$$(\forall x)[\underline{R}\langle x\rangle \to x\underline{\neq}x\underline{+}y], \tag{3.3}$$
missä R on jälleen edellisessä kohdassa esitelty yksipaikkainen relaatio, ei ole lause, sillä siinä esiintyy muuttuja y ilman vastaavaa kvanttoria $\forall y$.

Otelttan selkeyden takia seuraava merkintätapa käyttöön.

Merkintä 3.1. *Jätetään alleviivaus pois tuttujen vakioiden $1,\pi,e,\dots,$ relaatioiden $=,<,\neq,\dots$ ja funktioiden $+,-\sin,\dots$ nimistä.*

Yksipaikkainen relaatio voidaan samaistaa joukon kanssa, eli jokainen joukon alkio kuuluu sitä vastaavaan relaatioon. Määritelläänkin seuraavaksi edellisessä esimerkissä esiintynyt yksipaikkainen relaatio R, sekä vastaavat relaatiot N ja Z, joita tullaan käyttämään tiiviisti seuraavissa luvuissa. Esitellään myös yleistä tapausta koskeva relaatio X.

Määritelmä 3.5. (i) R on yksipaikkainen relaatio joukossa $\mathbb{R}$, ja $R\langle r\rangle$, joss $r \in \mathbb{R}$.

(ii) N on yksipaikkainen relaatio joukossa $\mathbb{N}$, ja $N\langle n\rangle$, joss $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Z on yksipaikkainen relaatio joukossa $\mathbb{Z}$, ja $Z\langle z\rangle$, joss $z \in \mathbb{Z}$.

(iv) Olkoon $X \subseteq \mathbb{R}$. Tällöin X on yksipaikkainen relaatio joukossa $\mathbb{R}$, ja $X\langle x\rangle$, joss $x \in X$.

Luonnollisesti relaation R *-siirto $^*R$ on yksipaikkainen relaatio joukossa $^*\mathbb{R}$, ja $^*R\langle r\rangle$, joss $r \in {}^*\mathbb{R}$. Vastaavasti toimitaan myös luonnollisten lukujen relaation N, kokonaislukujen relaation Z ja yleisessä tapauksessa joukon X relaation X kanssa. Seuraavassa luvussa tutustutaan tarkemmin *hyperluonnollisiin lukuihin* $^*\mathbb{N}$ ja *hyperkokonaislukuihin* $^*\mathbb{Z}$.

3.2 Lauseiden tulkinta

Kun luodaan formaalin logiikan lauseita, on oltava systemaattinen menetelmä, mikä kertoo kyseisten lauseiden totuusarvon. Jotta voitaisiin sanoa, milloin määritelmän 3.4 mukaiset lauseet ovat tosia, on ne ensin tulkittava. Seuraavaksi esitellään, miten tämä tulkinta tapahtuu relationaalisessa systeemissä $\mathscr{S}$, ja milloin lause on tosi tai epätosi.

Määritelmä 3.6. Vakiotermi on *tulkittavissa* (interpretable) relationaalisessa systeemissä $\mathscr{S}$, jos joko

- se on vakiosymboli $\underline{s}$, jolloin se tulkitaan vastaavaksi alkioksi $s \in S$, tai
- se on muotoa $\underline{f}(\tau^1, \ldots, \tau^n)$, missä termit $\tau^1, \ldots, \tau^n$ voidaan tulkita alkioiksi $s^1, \ldots, s^n \in S$ siten, että $\langle s^1, \ldots, s^n\rangle$ on funktion f, jonka $\underline{f}$ nimeää, määrittelyjoukossa. Tällöin $\underline{f}(\tau^1, \ldots, \tau^n)$ tulkitaan muotoon $f(s^1, \ldots, s^n)$.

Määritelmä 3.7.

- Lause $\underline{P}\langle\tau^1, \ldots, \tau^n\rangle$ on *tosi* relationaalisessa systeemissä $\mathscr{S}$, jos jokainen termi $\tau^i, 1 \leq i \leq n$ on tulkittavissa alkioksi $s^i, 1 \leq i \leq n$ ja $P\langle s^1, \ldots, s^n\rangle$.
- Lause
$$(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)[\wedge_{i=1}^{k}\underline{P}_i\langle\tilde{\tau}_i\rangle \to \wedge_{j=1}^{l}\underline{Q}_j\langle\tilde{\sigma}_j\rangle] \tag{3.4}$$
on tosi relationaalisessa systeemissä $\mathscr{S}$, jos sijoitettaessa jokaisen muuttujasymbolin $x_1, \ldots, x_n$ paikalle mikä tahansa vakiosymboli $\underline{s^1}, \ldots, \underline{s^n}$ jokaisen

lauseen $\underline{P}_i\langle\tau_i^1,\ldots,\tau_i^{n_i}\rangle, 1\le i\le k$, ollessa tosi on myös jokainen lause

$$\underline{Q}_j\langle\sigma_j^1,\ldots,\sigma_j^{n_j}\rangle, 1\le j\le l,$$

tosi.

Edellisessä esimerkissä tarkasteltiin relationaalista systeemiä

$$\mathscr{S}=(\mathbb{R},\{=,\le,\neq\},\{+,\cdot\}),$$

ja siihen liittyvää kieltä $L_{\mathscr{S}}$. Luonnollisesti tulevaisuutta ajatellen tarvitaan huomattavasti rikkaampi systeemi, missä on enemmän relaatioita ja funktiota. Rikastetaan relationaalista systeemiä $\mathscr{S}$ lisäämällä siihen kaikki mahdolliset äärellispaikkaiset relaatiot ja funktiot, joissa on äärellinen määrä muuttujia, seuraavassa määritelmässä, ja tehdään sama vastaavalle epästandardille relationaaliselle systeemille.

Määritelmä 3.8. Struktuuri $\mathcal{R}=(\mathbb{R},\mathscr{P},\mathscr{F})$ on relationaalinen systeemi, missä $\mathscr{P}$ on kaikkien joukon $\mathbb{R}$ äärellispaikkaisten relaatioiden joukko, ja $\mathscr{F}$ on kaikkien joukon $\mathbb{R}$ funktioiden, joissa on äärellinen määrä muuttujia, joukko.

Struktuuri ${}^*\mathcal{R}=({}^*\mathbb{R},{}^*\mathscr{P},{}^*\mathscr{F})$ on relationaalinen systeemi, missä ${}^*\mathscr{P}=\{{}^*P:P\in\mathscr{P}\}$ ja ${}^*\mathscr{F}=\{{}^*f:f\in\mathscr{F}\}$.

Esimerkki 3.2. Tarkastellaan seuraavaksi relationaalista systeemiä $\mathcal{R}$, ja siihen liittyvää kieltä $L_{\mathcal{R}}$.

(a) Termi $e^{2\pi+3}$ on vakiotermi, sillä se ei sisällä muuttujia. Se on myös tulkittavissa, sillä vakiosymbolit $2,\pi,3$ ovat tulkittavissa vastaaviksi alkioiksi $2,\pi,3$ (edellä sovittiin alleviivauksen poisjättäminen tutuista vakioista, relaatioista ja funktioista), termit 2π ja $2\pi+3$ voidaan tulkita joukon $\mathbb{R}$ alkioiksi, ja termi $2\pi+3$ kuuluu eksponenttifunktion exp määrittelyjoukkoon.

(b) Sen sijaan termi $\ln(-1)$ ei ole tulkittavissa, sillä vakio -1 ei kuulu logaritmifunktion ln määrittelyjoukkoon.

(c) Lause $1+1=2$ on tosi, koska termit $1+1$ ja 2 ovat tulkittavissa reaaliluvuiksi, ja $=\langle 1+1,2\rangle$.

(d) Lause

$$(\forall x)(\forall y)[\underline{R}\langle x\rangle\wedge\underline{R}\langle y\rangle\to x+y=y+x] \tag{3.5}$$

on myös tosi, sillä jokaisella reaalisella muuttujasymbolin x ja y arvolla vaihdantalaki pätee.

(e) Lause

$$(\forall x)(\forall y)[\underline{R}\langle x\rangle \wedge \underline{R}\langle y\rangle \to x^2 + y^2 > 0] \tag{3.6}$$

on epätosi, koska muuttujien arvoilla $x = y = 0$ $R\langle x\rangle$ ja $R\langle y\rangle$, mutta ei $>$ $\langle x^2 + y^2, 0\rangle$.

Kuten edellä mainittiin, näin muodostetulla kielellä on rajallinen ilmaisuvoima. Lauseissa voidaan käyttää kaikilla-kvanttoria, konjunktiota ja implikaatiota, mutta niissä ei voida käyttää sellaisia tavanomaisia ilmaisuja kuin negaatio $\neg$, ekvivalenssi $\leftrightarrow$, disjunktio $\vee$ tai olemassaolokvanttori $\exists$. Usein edellämainittuja kvanttoreita ja konnektiiveja sisältävät ilmaisut voidaan kuitenkin kääntää määritelmän 3.4 mukaisiksi lauseiksi seuraavilla manipulaatioilla.

Muotoa $\underline{P}\langle \tau^1, \ldots, \tau^n\rangle$ olevan lauseen negaatio $\neg\underline{P}\langle \tau^1, \ldots, \tau^n\rangle$ voidaan usein esittää relaation P komplementin P' avulla. Ilmaisu $\neg\underline{P}\langle \tau^1, \ldots, \tau^n\rangle$ on tosi, jos $P'\langle \tau^1, \ldots, \tau^n\rangle$. On kuitenkin huomioitava, että mikäli termit $\tau^1, \ldots, \tau^n$ eivät ole tulkittavissa, niin lause $\underline{P}\langle \tau^1, \ldots, \tau^n\rangle$ eikä myöskään lause $P'\langle \tau^1, \ldots, \tau^n\rangle$ ole tosi. Ekvivalenssi $\leftrightarrow$ voidaan esittää kahdella määritelmän 3.4 toisen kohdan mukaisella lauseella. Ilmaisu

$$(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)[\wedge_{i=1}^{k}\underline{P}_i\langle \tilde{\tau}_i\rangle \leftrightarrow \wedge_{j=1}^{l}\underline{Q}_j\langle \tilde{\sigma}_j\rangle] \tag{3.7}$$

on tosi, jos sekä lause

$$(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)[\wedge_{i=1}^{k}\underline{P}_i\langle \tilde{\tau}_i\rangle \to \wedge_{j=1}^{l}\underline{Q}_j\langle \tilde{\sigma}_j\rangle] \tag{3.8}$$

että lause

$$(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)[\wedge_{j=1}^{l}\underline{Q}_j\langle \tilde{\sigma}_j\rangle \to \wedge_{i=1}^{k}\underline{P}_i\langle \tilde{\tau}_i\rangle] \tag{3.9}$$

on tosi. Lauseiden $\underline{P}\langle \tau^1, \ldots, \tau^n\rangle$ ja $\underline{Q}\langle \sigma^1, \ldots, \sigma^m\rangle$ disjunktio voidaan esittää De Morganin lain avulla seuraavasti: lause $\underline{P}\langle \tau^1, \ldots, \tau^n\rangle \vee \underline{Q}\langle \sigma^1, \ldots, \sigma^m\rangle$ on tosi, jos lause $\underline{P'}\langle \tau^1, \ldots, \tau^n\rangle \wedge \underline{Q'}\langle \sigma^1, \ldots, \sigma^m\rangle$ on epätosi, eli disjunktio on tosi, joss lause $(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)[\underline{P'}\langle \tau^1, \ldots, \tau^n\rangle \wedge \underline{Q'}\langle \sigma^1, \ldots, \sigma^m\rangle \to 1 = 0]$ on tosi.

Esimerkki 3.3. Olkoon P ja Q yksipaikaisia relaatioita luonnollisten lukujen joukossa $\mathbb{N}$. $P\langle n\rangle$, jos n on pariton, ja $Q\langle m\rangle$, jos m on parillinen. Tarkastellaan tällä kertaa kieltä $L_{\mathcal{N}}$. Jätetään lauseista pois tavanomainen ilmaisu $\underline{N}\langle n\rangle$, sillä kaikki muuttujat $n \in \mathbb{N}$. Yleensä se on kuitenkin hyvä pitää selkeyden takia mukana.

(a) Toteamus *Luku n ei ole pariton.* voidaan esittää komplementin avulla: $P'\langle n\rangle$, (ja tietysti myös $Q\langle n\rangle$.)

(b) Ilmaisu *Kaikilla luonnollisilla luvuilla n pätee: n on pariton, joss n ei ole parillinen.* voidaan esittää lauseilla

$$(\forall n)[\underline{P}\langle n\rangle \to \underline{Q}'\langle n\rangle] \tag{3.10}$$

ja

$$(\forall n)[\underline{Q}'\langle n\rangle \to \underline{P}\langle n\rangle]. \tag{3.11}$$

Toteamus on tosi, kun molemmat lauseet ovat tosia.

(c) Toteamus *Kaikilla luonnollisilla luvuilla n pätee: n on pariton tai n on parillinen.* Voidaan esittää lauseen

$$(\forall n)[\underline{P}'\langle n\rangle \wedge \underline{Q}'\langle n\rangle \to 1 = 0] \tag{3.12}$$

avulla. (Tässä esimerkissä konnektiivia "tai"ei ole tulkittu poissulkevana.)

Eksistenssikvanttorin $\exists$ sisältävien ilmaisujen kääntäminen sopivanmuotoiseksi lauseeksi onkin haastavampi tapaus. Eksistenssikvanttori kertoo, että on olemassa tietyt ehdot täyttävä objekti, joten lukija pystyy valitsemaan jonkin objektin, joka toteuttaa nämä ehdot. Mikäli kvanttori sijaitsee joidenkin muuttujien vaikutusalueella, riippuu objektin arvo luonnollisesti kyseisten muuttujien arvoista. Näin ollen voidaan poistaa eksistenssikvanttori lauseesta, ja lisätä siihen valittua objektia kuvaava funktio, jonka muuttujina ovat ne muuttujat, joiden vaikutusalueella eksistenssikvanttori on. Kyseistä funktiota kutsutaan Skolemfunktioksi ja merkitään symbolilla Ψ. Näinmuodostetun uuden ilmaisun on luonnollisesti sisällettävä täsmälleen sama informaatio, kuin alkuperäisen ilmaisun. Seuraavassa esimerkissä esitellään, miten Skolemfunktioita muodostetaan.

Esimerkki 3.4. (a) Ilmaisun *Jokaista reaalilukua x kohti on olemassa reaaliluku y siten, että $x + y = 0$.* kääntämiseksi määritelmän 3.4 mukaiseksi lauseeksi määritellään Skolemfunktio $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \Psi(x) = -x$. Nyt edellisen ilmaisun kanssa yhtäpitävä toteamus *Kaikilla reaaliluvuilla* x *pätee* $x+\Psi(x)=0$. voidaan esittää lauseena

$$(\forall x)[\underline{R}\langle x\rangle \to x+\underline{\Psi}(x)=0]. \tag{3.13}$$

(b) Ilmaisua *Kaikkia reaalilukuja* x *ja* y *kohti, joilla* $x<y$*, on olemassa reaaliluku* z *siten, että* $x<z<y$. varten määritellään Skolemfunktioksi $\Psi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \Psi(x,y)=\frac{x+y}{2}$. Tällöin yhtäpitävä ilmaisu *Kaikille reaaliluvuilla* x *ja* y*, joilla* $x<y$*, pätee* $x<\Psi(x,y)<y$. voidaan esittää lauseena

$$(\forall x)[\underline{R}\langle x\rangle \wedge \underline{R}\langle y\rangle \wedge x<y \to x<\underline{\Psi}(x,y)<y]. \tag{3.14}$$

(c) Tarkastellaan seuraavaksi tapausta

$$(\forall x_1)\dots(\forall x_n)(\exists y)[\underline{P}\langle x_1,\dots,x_n,y\rangle \to \underline{Q}\langle x_1,\dots,x_n,y\rangle]. \tag{3.15}$$

Määritellään tällä kertaa Skolemfunktioksi $\Psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Täsmällinen määritelmä riippuu tietysti relaatioiden P ja Q määritelmistä. Koska kyseinen muuttuja y on ilmaisun 3.15 mukaan olemassa kaikilla mahdollisilla muutujien $x_1,\dots,x_n$ kombinaatioilla, voidaan esittää ilmaisun 3.15 kanssa yhtäpitävä lause

$$(\forall x_1)\dots(\forall x_n)[\underline{P}\langle x_1,\dots,x_n,\underline{\Psi}(x_1,\dots,x_n)\rangle \to \underline{Q}\langle x_1,\dots,x_n,\underline{\Psi}(x_1,\dots,x_n)\rangle]. \tag{3.16}$$

Otetaan lauseiden selkeyttämiseksi ja yksinkertaistamiseksi seuraavat merkintätavat käyttöön.

Merkintä 3.2.

- *Jos* $\underline{r}$ *on alkion* $r\in\mathbb{R}$ *nimi kielessä* $L_{\mathcal{R}}$*, niin* $\underline{r}$ *on myös alkion* ${}^*r\in{}^*\mathbb{R}$ *nimi kielessä* $L_{{}^*\mathcal{R}}$.
- *Jos* $\underline{P}$ *on joukon* $\mathbb{R}$ *relaation* P *nimi kielessä* $L_{\mathcal{R}}$*, niin* ${}^*\underline{P}$ *on joukon* ${}^*\mathbb{R}$ *relaation* ${}^*P$ *nimi kielessä* $L_{{}^*\mathcal{R}}$*. Erityisesti,*
- *jos* $\underline{f}$ *on joukon* $\mathbb{R}$ *funktion* f *nimi kielessä* $L_{\mathcal{R}}$*, niin* ${}^*\underline{f}$ *on joukon* ${}^*\mathbb{R}$ *funktion* ${}^*f$ *nimi kielessä* $L_{{}^*\mathcal{R}}$.
- *Symbolit* $<,+$ *ja* $*$ *merkitsevät siis tavanomaisia relaatioita ja funktioita sekä struktuurissa* $\mathcal{R}$ *että* ${}^*\mathcal{R}$.

Seuraavaksi esitellään, miten kielen $L_{\mathcal{R}}$ lauseita siirretään kieleen $L_{{}^*\mathcal{R}}$.

Määritelmä 3.9. Termin τ $*$-siirto määritellään seuraavasti:

- Jos τ on muuttuja- tai vakiosymboli, niin ${}^*\tau = \tau$.
- Jos $\tau = \underline{f}(\tau^1, \ldots, \tau^n)$, niin ${}^*\tau = {}^*\underline{f}({}^*\tau^1, \ldots, {}^*\tau^n)$.

Määritelmä 3.10. Jos Φ on lause kielessä $L_{\mathcal{R}}$, niin lauseen Φ *-siirto määritellään seuraavasti:

- Jos Φ on lause muotoa $\underline{P}\langle\tau^1, \ldots, \tau^n\rangle$, niin ${}^*\Phi = {}^*\underline{P}\langle{}^*\tau^1, \ldots, {}^*\tau^n\rangle$.
- Jos Φ on lause muotoa
$$(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)[\wedge_{i=1}^k \underline{P}_i\langle\tilde{\tau}_i\rangle \to \wedge_{j=1}^l \underline{Q}_j\langle\tilde{\sigma}_j\rangle], \tag{3.17}$$
niin
$${}^*\Phi = (\forall x_1)\ldots(\forall x_n)[\wedge_{i=1}^k {}^*\underline{P}_i\langle{}^*\tilde{\tau}_i\rangle \to \wedge_{j=1}^l {}^*\underline{Q}_j\langle{}^*\tilde{\sigma}_j\rangle], \tag{3.18}$$
missä ${}^*\tilde{\tau} = \langle{}^*\tau^1, \ldots, {}^*\tau^n\rangle$, jos $\tilde{\tau} = \langle\tau^1, \ldots, \tau^n\rangle$.

Esimerkki 3.5. (a) Termin $\underline{f}(x)+2\underline{g}(x)\underline{h}(y)$ *-siirto on termi ${}^*\underline{f}(x)+2{}^*\underline{g}(x){}^*\underline{h}(y)$.

(b) Lauseen
$$(\forall x)(\forall y)[\underline{R}\langle x\rangle \wedge \underline{R}\langle y\rangle \wedge x < y \to \underline{f}(x) < \underline{f}(y)] \tag{3.19}$$
*-siirto on lause
$$(\forall x)(\forall y)[{}^*\underline{R}\langle x\rangle \wedge {}^*\underline{R}\langle y\rangle \wedge x < y \to {}^*\underline{f}(x) < {}^*\underline{f}(y)], \tag{3.20}$$
mikä on aidosti kasvavan funktion määritelmä struktuurissa ${}^*\mathcal{R}$.

3.3 Siirtoperiaate

Nyt voidaankin esitellä siirtoperiaate, jonka avulla säännönmukaisuuksia voidaan siirtää reaalilukujen puolelta hyperreaalilukujen puolelle.

Lause 3.1. (Siirtoperiaate) *Jos kielen $L_{\mathcal{R}}$ lause Φ on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$, niin lauseen Φ *-siirto ${}^*\Phi$ kielessä $L_{{}^*\mathcal{R}}$ on tosi struktuurissa ${}^*\mathcal{R}$.*

Todistus. Todistus löytyy liitteestä B. □

Kuten edellä on mainittu, tässä työssä käytettävä kieli ja siihen liittyvä siirtoperiaate on yksinkertaistettu versio yleisestä tapauksesta. Yleisessä siirtoperiaatteessa siirto toimii molempiin suuntiin, eli

$$\text{lause } \Phi \text{ on tosi struktuurissa } \mathcal{R} \Leftrightarrow \text{lause } {}^*\Phi \text{ on tosi struktuurissa } {}^*\mathcal{R}.$$

Oletetaan, että lause Φ on tulkittavissa, mutta se on epätosi. Jos kielessä $L_{\mathcal{R}}$ olisi myös konnektiivi negaatio $\neg$, niin lause $\neg\Phi$ olisi tulkittavissa ja tosi. Siirtoperiaatteen nojalla lause $\neg{}^*\Phi$ olisi tosi struktuurissa ${}^*\mathcal{R}$. Jos tällöin kielen $L_{\mathcal{R}}$ lause Φ on tulkittavissa ja lauseen Φ *-siirto ${}^*\Phi$ on tosi struktuurissa ${}^*\mathcal{R}$, niin alkuperäinen lause Φ on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$. Mutta koska karsitussa kielessä ei ole negaatiota, (mikä sisältyy rikkaampaan kieleen,) niin ylläolevan kaltaista päättelyä ei voida tehdä.

Esitellään seuraavaksi siirtoperiaatteen toimintaa muutaman esimerkinomaisen lauseen avulla.

Lause 3.2. *Funktio* ${}^*\sin$ *on jaksollinen, ja sen jakso on* 2π*.*

Todistus. Lause

$$(\forall x)[\underline{R}\langle x\rangle \rightarrow \sin(x+2\pi) = \sin(x)] \tag{3.21}$$

on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$. Siirtoperiaatteen nojalla lause

$$(\forall x)[{}^*\underline{R}\langle x\rangle \rightarrow {}^*\sin(x+2\pi) = {}^*\sin(x)] \tag{3.22}$$

on tosi struktuurissa ${}^*\mathcal{R}$, eli funktio ${}^*\sin$ on jaksollinen, ja sen jakso on 2π. □

Lause 3.3. *Kolmioepäyhtälö* $|x+y| \leq |x| + |y|$ *pätee kaikilla hyperreaaliluvuilla* $x, y \in {}^*\mathbb{R}$*.*

Todistus. Lause

$$(\forall x)(\forall y)[\underline{R}\langle x\rangle \wedge \underline{R}\langle y\rangle \rightarrow |x+y| \leq |x| + |y|] \tag{3.23}$$

on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$. Siirtoperiaatteen nojalla saadaan

$$(\forall x)(\forall y)[{}^*\underline{R}\langle x\rangle \wedge {}^*\underline{R}\langle y\rangle \rightarrow |x+y| \leq |x| + |y|]. \tag{3.24}$$

□

Lause 3.4. *Jos funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on surjektio, niin funktio ${}^*f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ on myös surjektio.*

Todistus. Olkoon funktio f surjektio. Tällöin voidaan määritellä Skolemfunktio $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että lause

$$(\forall x)[\underline{R}\langle x\rangle \to \underline{f}(\underline{\Psi}(x)) = x] \tag{3.25}$$

on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$. Siirtoperiaatteen nojalla saadaan

$$(\forall x)[{}^*\underline{R}\langle x\rangle \to {}^*\underline{f}({}^*\underline{\Psi}(x)) = x], \tag{3.26}$$

eli funktio ${}^*f$ on myös surjektio. $\square$

Tarkastellaan vielä luvun lopuksi, voidaanko Arkhimedeen ominaisuus siirtää hyperreaalilukujen joukkoon siirtoperiaatteen avulla. Arkhimedeen ominaisuus on voimassa reaalilukujen joukossa, ja se (eräs muoto siitä) sanoo, että

$$(\forall x)(\exists n)[\underline{R_+}\langle x\rangle \wedge \underline{N}\langle n\rangle \to \frac{1}{n} < x]. \tag{3.27}$$

Lause 3.27 ei selvästi ole kielen $L_{\mathcal{R}}$ mukainen lause, sillä se sisältää olemassaolokvanttorin $\exists$. Kuten edellä nähtiin, asia voidaan kuitenkin helposti korjata Skolemfunktion avulla. Seuraavassa luvussa lause 3.27 voitaisiin tulkita, että infinitesimaalisen pieniä reaalilukuja ei ole olemassa. Kun kyseinen lause siirretään struktuuriin ${}^*\mathcal{R}$, niin se on siirtoperiaatteen mukaan edelleen tosi. Jotta pääsisimme näkemään, miten tämä ilmiselvältä ristiriidalta kuulostava tilanne ratkeaa, määritellään Skolemfunktio $\Psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{N}$ siten, että lause

$$(\forall x)[\underline{R_+}\langle x\rangle \to \frac{1}{\underline{\Psi(x)}} < x] \tag{3.28}$$

on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$. Siirtoperiaatteen nojalla saadaan

$$(\forall x)[{}^*\underline{R_+}\langle x\rangle \to \frac{1}{{}^*\underline{\Psi(x)}} < x]. \tag{3.29}$$

Lause 3.29 on siis selvästi siirtoperiaatteen nojalla tosi, mutta se **ei** sano mitään Arkhimedeen ominaisuuden voimassaolosta hyperreaalilukujen joukossa. Skolemfunktio ${}^*\Psi : {}^*\mathbb{R}_+ \to {}^*\mathbb{N}$ nimittäin kuvaa positiiviset hyperreaaliluvut luonnollisten lukujen joukkoa huomattavasti suuremmalle joukolle ${}^*\mathbb{N}$, joten kyseessä ei ole Arkhimedeen ominaisuus. Tästä huomataan, että siirtoperiaatetta käytettäessä pitää olla tarkkana. Vaikka siirretty lause 3.29 on tosi struktuurissa ${}^*\mathcal{R}$, niin se ei silti ilmaise samaa asiaa kuin struktuurista $\mathcal{R}$ siirretty vastaava lause.

4. HYPERREAALILUKUJEN OMINAISUUKSIA

Tässä luvussa tutustutaan tarkemmin hyperreaalilukuihin ja niiden ominaisuuksiin. Aloitetaan määritelemällä, mitä ovat standardit ja epästandardit hyperreaaliluvut.

4.1 Hyperreaaliluvut

Määritelmä 4.1. Muotoa $^*x$ olevia hyperreaalilukuja kutsutaan *standardeiksi* hyperreaaliluvuiksi. Hyperreaaliluvut, jotka eivät ole standardeja ovat *epästandardeja* hyperreaalilukuja. n-jono $\langle a^1, \dots, a^n \rangle$ on standardi, jos jokainen alkio a^i on standardi hyperreaaliluku.

Standardien hyperreaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ samaistettiin merkinnässä 2.1 joukon $(\mathbb{R})_* = \{x \in {}^*\mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : {}^*y = x\}$ kanssa. Huomionarvoista on, että standardien hyperreaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ ei ole minkään osajoukon $A \subseteq \mathbb{R}$ *-siirto. Todistetaan tämä seuraavan lauseen avulla.

Lause 4.1. *Standardien hyperreaalilukujen joukko $\mathbb{R} \subseteq {}^*\mathbb{R}$ ei ole muotoa $^*A$ millään osajoukolla $A \subseteq \mathbb{R}$.*

Todistus. Oletetaan, että $\mathbb{R} = {}^*A$ jollakin osajoukolla $A \subseteq \mathbb{R}$. Jos joukko A on ylhäältä rajoitettu, niin on olemassa luku $a \in \mathbb{R}$ siten, että lause

$$(\forall x)[\underline{A}\langle x \rangle \rightarrow x \leq a] \tag{4.1}$$

on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$. Siirtoperiaatteen nojalla saadaan

$$(\forall x)[{}^*\underline{A}\langle x \rangle \rightarrow x \leq a], \tag{4.2}$$

eli kaikilla $x \in \mathcal{R}$ pätee $x \leq a$, mikä on selvästi väärin.

Jos taas joukko A ei ole ylhäältä rajoitettu, niin kaikilla $n \in \mathbb{N}$ voidaan valita $a_n \in A$ siten, että $lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Tällöin määritelmän 2.10 nojalla $a = [\langle a_1, a_2, a_3 \ldots \rangle] \in {}^*A$. Mutta koska $lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, niin kaikilla luvuilla $x \in \mathbb{R}$ on olemassa indeksi n_0 siten, että $x \neq a_n$ kaikilla $n \geq n_0$, niin $x \neq a$, eli $a \notin \mathbb{R}$. Siis ei ole olemassa joukkoa $A \subseteq \mathbb{R}$ siten, että $\mathbb{R} = {}^*A$. □

Itseasiassa suurin osa joukon $^*\mathbb{R}$ osajoukoista $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ ei ole minkään osajoukon $B \subseteq \mathbb{R}$ *-siirron tuotos.

Määritellään seuraavaksi, millaisia ovat äärettömän suuret ja infinitesimaalisen pienet luvut.

Määritelmä 4.2. Olkoon

(i) Hyperreaaliluku $s \in {}^*\mathbb{R}$ on *ääretön*, jos $n < |s|$ kaikilla luonnollisilla luvuilla n.

(ii) Hyperreaaliluku $s \in {}^*\mathbb{R}$ on *äärellinen*, jos $|s| < n$ jollakin luonnollisella luvulla n.

(iii) Hyperreaaliluku $s \in {}^*\mathbb{R}$ on *infinitesimaalinen*, jos $|s| < \frac{1}{n}$ kaikilla luonnollisilla luvuilla n.

Infinitesimaaliset luvut ovat siis itseisarvoltaan pienempiä, kuin mikään standardi reaaliluku. Vastaavast äärettömät luvut ovat itseisarvoltaan suurempia kuin mikään standardi reaaliluku. Äärettömiä lukuja ei kuitenkaan pidä sotkea äärettömyyden käsitteen (∞) kanssa, mikä ei edes ole luku. Määritelmästä nähdään myös, että hyperreaaliluku $s \neq 0$ ääretön, joss käänteisluku s^{-1} on infinitesimaalinen, sillä seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja keskenään:

- Luku s on ääretön.
- $n < |s|$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.
- $|s^{-1}| < \frac{1}{n}$.
- s^{-1} on infinitesimaalinen.

Vastaavasti hyperreaaliluku $s \neq 0$ infinitesimaalinen, joss käänteisluku s^{-1} on ääretön.

Esimerkki 4.1. (a) Luku $2 = [\langle 2, 2, 2, \dots \rangle]$ on standardi hyperreaaliluku. Se on lisäksi äärellinen, sillä se on pienempi kuin luonnollinen luku 3 ($= [\langle 3, 3, 3, \dots \rangle]$).

(b) Luku 0 on standardi hyperreaaliluku. Se on myös infinitesimaalinen, sillä $0 < \frac{1}{n}$ kaikilla luonnollisilla luvuilla n. Luku 0 on ainut standardi infinitesimaaliluku.

(c) Luku $[\langle 1, 2, 3, \dots \rangle]$ on epästandardi hyperreaaliluku, sillä kaikilla $x \in R$ joukossa $\{i \in \mathbb{N} : i = x\}$ on korkeintaan yksi alkio, eikä se siten voi ääreellisen kokoisena joukkona kuulua vapaaseen ultrasuodattimeen, eli luku $[\langle 1, 2, 3, \dots \rangle]$ ei voi olla muotoa $^*x$ millään luvulla $x \in R$. Se on myös ääretön, sillä kaikilla luonnollisilla luvuilla n joukko $\{i \in \mathbb{N} : i > n\} \in \mathcal{U}$, koska $\mathcal{U}$ on vapaa ja $\{i \in \mathbb{N} : i > n\}'$ on äärellinen (mahtavuus = n), eli $n < [\langle 1, 2, 3, \dots \rangle]$.

(d) Luku $[\langle \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \rangle]$ on myös epästandardi hyperreaaliluku, sillä kaikilla $x \in R$ joukossa $\{i \in \mathbb{N} : x = \frac{1}{i}\}$ on korkeintaan yksi alkio, eikä se siten voi ääreellisen kokoisena joukkona kuulua vapaaseen ultrasuodattimeen, eli luku $[\langle \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \rangle]$ ei voi olla muotoa $^*x$ millään luvulla $x \in R$. Se on infinitesimaalinen, sillä kaikilla luonnollisilla luvuilla n joukko $\{i \in \mathbb{N} : \frac{1}{i} < \frac{1}{n}\} \in \mathcal{U}$, koska $\mathcal{U}$ on vapaa ja $\{i \in \mathbb{N} : \frac{1}{i} < \frac{1}{n}\}'$ on äärellinen (mahtavuus = n), eli $[\langle \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \rangle] < \frac{1}{n}$.

Näytetään seuraavaksi, että äärelliset ja infinitesimaaliset luvut muodostavat molemmat alirenkaan joukossa $^*\mathbb{R}$, ja infinitesimaaliluvut muodostavat ideaalin äärellisten lukujen joukossa.

Lause 4.2. *(i) Kahden äärellisen (infinitesimaalisen) luvun summa, erotus ja tulo on äärellinen (infinitesimaalinen) joukossa* $^*\mathbb{R}$.

(ii) Infinitesimaalisen ja äärellisen luvun tulo on infinitesimaalinen.

Todistus. (i) Olkoon luvut a ja b äärellisiä. Tällöin on olemassa luonnolliset luvut n ja m siten, että $|a| < n$ ja $|b| < m$. Lauseen 3.3 (kolmioepäyhtälön) nojalla $|a+b| \leq |a|+|b|$, eli $|a+b| < n+m$, joten summa $a+b$ on äärellinen. Vastaavasti $|a-b| \leq |a| + |-b| = |a| + |b| < n + m$, eli erotus $a - b$ on äärellinen. Koska $|ab| = |a||b| < nm$, niin myös tulo ab on äärellinen.

Olkoon sitten luvut x ja y infinitesimaalisia, ja r jokin luonnollinen luku. Tällöin $|x| < \frac{1}{2r}$ ja $|y| < \frac{1}{2r}$, eli $|x+y| \leq |x|+|y| < \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r} = \frac{1}{r}$, joten summa $a+b$ on infinitesimaalinen. Vastaavasti $|x-y| \leq |x|+|-y| = |x|+|y| < \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r} = \frac{1}{r}$, eli erotus $a-b$ on infinitesimaalinen. Koska luvut x ja y ovat infinitesimaalisia, niin $x < \frac{1}{\lceil\sqrt{n}\rceil} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ ja $y < \frac{1}{\lceil\sqrt{n}\rceil} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, joten $|xy| = |x||y| < \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$, eli myös tulo xy on infinitesimaalinen.

(ii) Olkoon a infinitesimaalinen ja b äärellinen luku. Tällöin on olemassa luonnollinen luku n siten, että $|b| < n$. Koska a on infinitesimaalinen, niin $a < \dfrac{1}{n^2}$, joten $|ab| = |a||b| < \dfrac{1}{n^2}n = \frac{1}{n}$, eli tulo ab on infinitesimaalinen.

□

Vaikka infinitesimaaliluvut muodostavat ideaalin äärellisten lukujen joukossa, niin on syytä huomata, että infinitesimaaliluvut muodostavat vain alirenkaan, ei ideaalia, joukossa $^*\mathbb{R}$. Infinitesimaaliluvun ja hyperreaaliluvun, (jos se on ääretön,) tulon ei siis tarvitse olla infinitesimaalinen. Tarkistellaan esimerkiksi positiivista infinitesimaalilukua s. Edellä todettiin, että infinitesimaalisen luvun käänteisluku s^{-1} on ääretön. Nyt edellisen lauseen mukaan luku s^2 on infinitesimaalinen ja sen käänteisluku $(s^{-1})^2$ on ääretön. Tällöin huomataan, että:

- Luku $s^2 \cdot s^{-1} = s$ on infinitesimaalinen.
- Luku $s \cdot s^{-1} = 1$ on äärellinen, mutta ei infinitesimaalinen.
- Luku $s \cdot (s^{-1})^2 = s^{-1}$ on ääretön.

Infinitesimaaliluvun ja äärettömän luvun tulo voi siis olla infinitesimaalinen, äärellinen tai ääretön riippuen kerrottavien lukujen valinnasta. Huomionarvoista on myös se, että äärettömät luvut eivät muodosta alirengasta joukossa $^*\mathbb{R}$. Vaikka kahden äärettömän luvun tulo on aina ääretön, niin kahden äärettömän luvun summan ja erotuksen ei kuitenkaan tarvitse olla ääretön. Olkoon $x \in {}^*\mathbb{R}$ ääretön luku. Tällöin luonnollisesti myös $x + 1$ ja $-x$ ovat äärettömiä lukuja, ja:

- Luku $x + (-x) = x - x = 0$ on infinitesimaalinen.
- Luku $(x + 1) - x = 1$ on äärellinen, mutta ei infinitesimaalinen.
- Luku $x + x$ on ääretön.

Esitetään seuraavaksi monadin ja galaksin käsitteet, sekä relaatiot $\simeq$ ja $\sim$.

Määritelmä 4.3. Olkoon $x, y \in {}^*\mathbb{R}$.

(i) x ja y ovat *infinitesimaalisen lähellä toisiaan*, jos $x - y$ on infinitesimaalinen. Merkitään $x \simeq y$, jos x ja y ovat infinitesimaalisen lähellä toisiaan, $x \not\simeq y$ muuten. Alkion x *monadi* (monad) on joukko $m(x) = \{y \in {}^*\mathbb{R} : x \simeq y\}$.

(ii) x ja y ovat *äärellisen lähellä toisiaan*, jos $x - y$ on äärellinen. Merkitään $x \sim y$, jos x ja y ovat äärellisen lähellä toisiaan, $x \not\sim y$ muuten. Alkion x *galaksi* (galaxy) on joukko $G(x) = \{y \in {}^*\mathbb{R} : x \sim y\}$.

Se, että kaksi hyperreaalilukua on infinitesimaalisen lähellä toisiaan, tarkoittaa tietysti sitä, että ne eroavat toisistaan korkeintaan infinitesimaalisen vähän. Toisin sanottuna, jos hyperreaaliluvuille $x, y \in {}^*\mathbb{R}$ pätee $x \simeq y$, niin on olemassa infinitesimaaliluku $\epsilon \in {}^*\mathbb{R}$ siten, että $x = \epsilon + y$. Luonnollisesti jokaiken luku $x \in {}^*\mathbb{R}$ on infinitesimaalisen lähellä itseään, sillä $x - x = 0$. Lisäksi jokaisella infinitesimaaliluvulla δ pätee $x \simeq x + \delta$, koska erotus $x + \delta - x = \delta$ on infinitesimaalinen.

Tarkastellaan seuraavaksi muutamia monadin, galaksin ja relaation $\simeq$ ominaisuuksia.

Lause 4.3. *Olkoon $x, y \in {}^*\mathbb{R}$ ja $x \simeq y$.*

(i) Jos luku x on infinitesimaalinen, niin luku y on infinitesimaalinen.

(ii) Jos luku x on äärellinen, niin luku y on äärellinen.

(iii) Jos luku x on ääretön, niin luku y on ääretön.

Todistus. Koska $x \simeq y$, niin on olemassa infinitesimaaliluku ϵ siten, että $y = \epsilon + x$.

(i) Olkoon luku x infinitesimaalinen. Lauseen 4.2 mukaan kahden infinitesimaalisen luvun summa on infinitesimaalinen, joten luku $y = \epsilon + x$ on infinitesimaalinen.

(ii) Olkoon luku x äärellinen. Edelleen lauseen 4.2 mukaan kahden äärellisen luvun summa on äärellinen, joten luku $y = \epsilon + x$ on äärellinen.

(iii) Olkoon luku x ääretön. Jos luku $y = \epsilon + x$ ei olisi ääretön, niin olisi olemassa sellainen $n \in \mathbb{N}$, että $n \geq |\epsilon + x|$. Mutta tällöin $n + 1 \geq |x|$, mikä on luvun x äärettömyydestä johtuen ristiriita, joten luku y on ääretön.

$\square$

Lause 4.4. *Olkoon $x, y \in {}^*\mathbb{R}$. Monadit $m(x)$ ja $m(y)$ ovat joko yhtä suuria tai erilliset joukot. Samoin galaksit $G(x)$ ja $G(y)$ ovat joko yhtä suuria tai erilliset joukot.*

Todistus. Relaatio $\simeq$ on transitiivinen, sillä jos $x \simeq y$ ja $y \simeq z$ joillakin $x, y, z \in {}^*\mathbb{R}$, niin $x - y$ ja $y - z$ ovat infinitesimaalisia, joten lauseen 4.2 nojalla kahden infinitesimaalisen luvun erotus $(x - y) - (y - z) = x - z$ on infinitesimaalinen, eli $x \simeq z$. Erotuksen vaihdannaisuuden takia relaatio $\simeq$ on myös symmetrinen. Olkoon sitten $x, y \in {}^*\mathbb{R}$. Jos $x \simeq y$, niin kaikilla $z \in {}^*\mathbb{R}$, joilla $x \simeq z$, pätee myös $y \simeq z$, eli $m(x) = m(y)$. Jos $x \not\simeq y$, niin ei ole olemassa $z \in {}^*\mathbb{R}$ siten, että $x \simeq z$ ja $y \simeq z$. Siis $m(x) \cap m(y) = \emptyset$.

Vastaavasti voidaan osoittaa, että relaatio $\sim$ on transitiivinen ja symmetrinen, ja edelleen osoittaa, että jos $x \sim y$, niin $G(x) = G(Y)$, ja jos $x \not\sim y$, niin $G(x) \cap G(y) = \emptyset$. $\square$

Lause 4.5. *Olkoon $x, x', y, y' \in {}^*\mathbb{R}$ äärellisiä ja $x \simeq x', y \simeq y'$. Tällöin*

(i) $x + y \simeq x' + y'$,

(ii) $x - y \simeq x' - y'$,

(iii) $xy \simeq x'y'$,

(iv) $\dfrac{x}{y} \simeq \dfrac{x'}{y'}$, *jos* $y, y' \not\simeq 0$.

Todistus. Lauseen 4.2 nojalla kahden infinitesimaalisen luvun summa, erotus ja tulo ovat infinitesimaalisia, ja infinitesimaalisen ja äärellisen luvun tulo on äärellinen. Luvut $x - x'$ ja $y - y'$ ovat infinitesimaalisia, joten luvut

(i) $(x + y) - (x' + y') = (x - x') + (y - y')$,

(ii) $(x - y) - (x' - y') = (x - x') - (y - y')$,

(iii) $xy - x'y' = xy - x'y' + xy' - xy' = x(y - y') + y'(x - x')$ ja

(iv) $\dfrac{x}{y} - \dfrac{x'}{y'} = \dfrac{xy' - x'y}{yy'} = \dfrac{xy' - x'y + xy - xy}{yy'} = \dfrac{y(x - x') - x(y - y')}{yy'} = \dfrac{1}{yy'}(y(x - x') - x(y - y'))$

ovat infinitesimaalisia. □

Lause 4.6. *(i) Monadi $m(0)$ on infinitesimaalien joukko.*

(ii) Galaksi $G(0)$ on ääreellisten lukujen joukko.

Todistus. (i) Olkoon $x \in m(0)$. Tällöin $x - 0 = x$ on infinitesimaalinen. Olkoon sitten y infinitesimaalinen, jolloin myös $y - 0$ on infinitesimaalinen, joten $y \simeq 0$ ja $y \in m(0)$. Siis monadi $m(0)$ on infinitesimaalien joukko.

(ii) Olkoon $x \in G(0)$. Tällöin $x - 0 = x$ on äärellinen. Olkoon sitten y äärellinen, jolloin myös $y - 0$ on äärellinen, joten $y \sim 0$ ja $y \in G(0)$. Siis galaksi $G(0)$ on ääreellisten lukujen joukko.

□

Jatketaan seuraavaksi hyperreaalilukujen ominaisuuksien tarkastelua. Näytetään, että jokainen äärellinen luku on infinitesimaalisen lähellä yksikäsitteistä standardia reaalilukua.

Lause 4.7. *Jos $x \in {}^*\mathbb{R}$ on äärellinen, niin on olemassa yksikäsitteinen standardi reaaliluku $r \in \mathbb{R}$, jolle pätee $x \simeq y$.*

Todistus. Olkoon $A = \{y \in \mathbb{R} : x \leq y\}$ ja $B = \{y \in \mathbb{R} : y < x\}$. Koska x on äärellinen, on olemassa standardi luku s siten, että $-s < x < s$. Tällöin joukko B ei ole tyhjä ja sillä on olemassa yläraja. Olkoon r pienin yläraja. Jokaisella reaalisella $\epsilon > 0$ $(r + \epsilon) \in A$ ja $(r - \epsilon) \in B$, joten $r - \epsilon < x \leq r + \epsilon$. Tällöin $|r - x| \leq \epsilon$, joten $r \simeq x$. Jos $r_1 \simeq x$, niin $|r_1 - r| \leq |r_1 - x| + |x - r| < 2\epsilon$ jokaisella standardilla $\epsilon > 0$, eli $r = r_1$ ja r on yksikäsitteinen. □

Koska jokainen äärellinen hyperreaaliluku on infinitesimaalisen lähellä jotakin yksikäsitteistä standardia reaalilukua, voidaan äärellisten hyperreaalilukujen joukosta määritellä funktio standardien reaalilukujen joukkoon tämän avulla.

Määritelmä 4.4. Olkoon $x \in {}^*\mathbb{R}$ äärellinen ja r yksikäsitteinen reaaliluku $r \in \mathbb{R}$ siten, että $x \simeq r$. Lukua r kutsutaan luvun x *standardiosaksi* (standard part) ja sitä merkitään $st(x)$ tai $°x$. Tämä määrittelee *standardiosafunktion* (standard part map) $st : G(0) \to \mathbb{R}$.

Jokainen äärellinen hyperreaaliluku x voidaan siis esittää muodossa $x = st(x) + \epsilon$, missä $st(x)$ on infinitesimaalisen lähellä lukua x oleva standardi reaaliluku, ja ϵ on infinitesimaaliluku. Todistetaan seuraavaksi, että funktio st on järjestyksen säilyttävä homomorfismi sekä muutama standardiosafunktioon liittyvä perustulos.

Lause 4.8. *Funktio st on järjestyksen säilyttävä homomorfismi joukosta $G(0)$ joukkoon $\mathbb{R}$, eli*

(i) $st(x \pm y) = st(x) \pm st(y)$,

(ii) $st(xy) = st(x)st(y)$,

(iii) $st(\frac{x}{y}) = \dfrac{st(x)}{st(y)}$, *jos* $st(y) \neq 0$,

(iv) $st(x) \leq st(y)$, *jos* $x \leq y$.

Todistus. Olkoon $x = st(x) + \epsilon, y = st(y) + \delta$, missä ϵ ja δ ovat infinitesimaalilukuja.

(i) $st(x \pm y) = st((st(x) + \epsilon) \pm (st(y) + \delta)) = st((st(x) + st(y)) \pm (\epsilon + \delta)) = st(x) \pm st(y)$, koska lauseen 4.2 mukaan $\epsilon + \delta$ on infinitesimaaliluku.

(ii) $st(xy) = st((st(x) + \epsilon)(st(y) + \delta)) = st(st(x)st(y) + st(x)\delta + \epsilon st(y) + \epsilon\delta) = st(x)st(y)$, koska edelleen lauseen 4.2 nojalla $st(x)\delta + \epsilon st(y) + \epsilon\delta$ on infinitesimaaliluku.

(iii) Olkoon $st(y) \neq 0$. Koska $st(x) = st(\frac{x}{y}y) = st(\frac{x}{y})st(y)$, niin $st(\frac{x}{y}) = \dfrac{st(x)}{st(y)}$.

(iv) $st(x) + \epsilon \leq st(y) + \delta$, eli $st(x) \leq st(y) + (\delta - \epsilon) < st(y) + r$ kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla r, joten $st(x) \leq st(y)$.

$\square$

Lause 4.9. *Olkoon x, y äärellisiä hyperreaalilukuja. Tällöin*

(i) $x \simeq y$, *joss* $st(x) = st(y)$,

(ii) $x \simeq st(x)$,

(iii) $x \in \mathbb{R}$, *joss* $st(x) = x$,

(iv) Jos $x \geq 0$, niin $st(\sqrt[n]{x}) = \sqrt[n]{st(x)}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Todistus. Olkoon $x = st(x) + \epsilon$ ja $y = st(y) + \delta$ äärellisiä hyperreaalilukuja, missä ϵ ja δ ovat infinitesimaalilukuja.

(i) Olkoon $x \simeq y$. Tällöin $x-y = (st(x)-st(y))+(\epsilon-\delta)$ on infinitesimaalinen, joten koska lauseen 4.2 nojalla $(\epsilon - \delta)$ on infinitesimaalinen, niin myös luvun $st(x) - st(y)$ täytyy olla infinitesimaalinen. Koska ainut standardi infinitesimaaliluku on 0, niin $st(x) - st(y) = 0$, eli $st(x) = st(y)$.

Olkoon sitten $st(x) = st(y)$. Tällöin $x - y = (st(x) - st(y)) + (\epsilon - \delta) = \epsilon - \delta$ on edelleen lauseen 4.2 nojalla infinitesimaalinen, joten $x \simeq y$.

(ii) $x - st(x) = st(x) + \epsilon - st(x) = \epsilon$ on infinitesimaalinen, joten $x \simeq st(x)$.

(iii) Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Koska $x - x$ on infinitesimaalinen, niin lauseen 4.7 mukaan x on ainut standardi reaaliluku, mikä on infinitesimaalisen lähellä lukua x. Siis $st(x) = x$.

Olkoon sitten $st(x) = x$. Koska funktion st maalijoukko on standardien reaalilukujen joukko, niin $x \in \mathbb{R}$.

(iv) Olkoon $x \geq 0$ ja $n \in \mathbb{N}$. Tällöin lauseen 4.8 kohtaa (ii) käyttäen saadaan $st(x) = st((\sqrt[n]{x})^n) = st(\sqrt[n]{x})st(\sqrt[n]{x}) \dots (st\sqrt[n]{x}) = (st(\sqrt[n]{x}))^n$, joten $st(\sqrt[n]{x}) = \sqrt[n]{st(x)}$.

□

Määritelmä 4.5. Olkoon $A \subset R$. Joukon $^*A$ *äärettömät alkiot* ovat joukko $^*A_\infty = {}^*A \cap ({}^*\mathbb{R} - G(0))$.

Lause 4.10. *Jos $A \subseteq \mathbb{N}$ ja A on ääretön, niin $^*A$ sisältää äärettömiä luonnollisia lukuja, eli $^*A \cap {}^*\mathbb{N}_\infty \neq \emptyset$.*

Todistus. Koska joukko A on ääretön, niin sillä ei ole olemassa ylärajaa. Jokaisella luonnollisella luvulla $n \in \mathbb{N}$ joukossa A on siis olemassa suurempi alkio kuin n, joten voidaan määritellä Skolemfunktio $\Psi : \mathbb{N} \to A$ siten, että $\Psi(n) \geq n$. Lause

$$(\forall n)[\underline{N}\langle n\rangle \to \underline{A}\langle\underline{\Psi}(n)\rangle \wedge n \leq \underline{\Psi}(n)] \tag{4.3}$$

on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$. Siirtoperiaatteen nojalla saadaan

$$(\forall n)[{}^*\underline{N}\langle n\rangle \to {}^*\underline{A}\langle {}^*\underline{\Psi}(n)\rangle \wedge n \leq {}^*\underline{\Psi}(n)]. \tag{4.4}$$

Valitaan jokin $n \in \mathbb{N}_\infty$, niin ${}^*\Psi(n) \in {}^*A \cap {}^*\mathbb{N}_\infty$, eli ${}^*A \cap {}^*\mathbb{N}_\infty \neq \emptyset$. □

4.2 Hyperluonnolliset luvut ja hyperkokonaisluvut

Tutustutaan seuraavaksi takemmin hyperluonnollisiin lukuihin ja hyperkokonaislukuihin, jotka ovat luonnollisten lukujen ja kokonaislukujen laajennokset hyperreaalilukuihin. Ne ovat hyödyllisiä työkaluja analyysissä, esimerkiksi integraalilaskennassa. Aloitetaan määrittelemällä hyperluonnollisten lukujen ja hyperkokonaislukujen joukot.

Määritelmä 4.6. Kutsutaan joukon ${}^*\mathbb{N}$ alkioita *hyperluonnollisiksi luvuiksi* (hyper integers) ja joukon ${}^*\mathbb{Z}$ alkioita *hyperkokonaisluvuiksi* (hypernatural numbers).

Hyperluonnollisten lukujen joukko sisältää kaikki luonnolliset luvut, ja hyperkokonaislukujen joukko sisältää kaikki kokonaisluvut, mutta ne ovat molemmat aidosti suurempia. Esimerkiksi lauseesta 4.10 nähdään, että on olemassa äärettömiä (hyper)luonnollisia lukuja.

Lause 4.11. *Hyperkokonaisluvut* ${}^*\mathbb{Z}$ *ovat hyperreaalilukujen* ${}^*\mathbb{R}$ *järjestetty alirengas.*

Todistus. Lause

$$(\forall x)(\forall y)[\underline{Z}\langle x\rangle \wedge \underline{Z}\langle y\rangle \to \underline{Z}\langle x+y\rangle \wedge \underline{Z}\langle x\cdot y\rangle] \tag{4.5}$$

on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$. Siirtoperiaatteen nojalla saadaan

$$(\forall x)(\forall y)[{}^*\underline{Z}\langle x\rangle \wedge {}^*\underline{Z}\langle y\rangle \to {}^*\underline{Z}\langle x+y\rangle \wedge {}^*\underline{Z}\langle x\cdot y\rangle], \tag{4.6}$$

eli ${}^*\mathbb{Z}$ on suljettu yhteen- ja kertolaskun suhteen. Koska lisäksi ykkösalkio 1 kuuluu joukkoon ${}^*\mathbb{Z}$, niin hyperkokonaisluvut ${}^*\mathbb{Z}$ ovat hyperreaalilukujen ${}^*\mathbb{R}$ alirengas. Joukko ${}^*\mathbb{Z}$ on myös järjestetty, kun käytetään tavanomaista hyperreaalilukujen järjestystä, joten ${}^*\mathbb{Z}$ on hyperreaalilukujen järjestetty alirengas. □

Näytetään seuraavaksi, että hyperkokonaisluvut (ja hyperkokonaislukujen osajoukko hyperluonnolliset luvut) käyttäytyvät samaan tapaan kuin reaaliset kokonaisluvut, eli ne jakautuvat hyperreaalilukujen lukusuoralle tasaisin välein. Kuten reaalisillakin kokonaisluvuilla, myös hyperkokonaisluvuilla täytyy kahden lähimmän luvun etäisyys toisistaan olla yksi. Lauseesta 2.7 nähdään, että reaaliluku on kokonaisluku, joss se on hyperkokonaisluku, eli ${}^*\mathbb{Z} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}$. Todistetaan seuraavan lauseen avulla, että edellä esitetyt vaatimukset pätevät kaikille, myös äärettömille, kokonaisluvuille.

Lause 4.12. *Jokaisella hyperkokonaisluvulla $n \in {}^*\mathbb{Z}$ $n+1$ on pienin hyperkokonaisluku, mikä on suurempi kuin n.*

Todistus. Lause

$$(\forall n)(\forall m)[\underline{Z}\langle n\rangle \wedge \underline{Z}\langle m\rangle \wedge (n \leq m \leq n+1) \wedge (n \neq m) \rightarrow (m = n+1)] \qquad (4.7)$$

on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$. Siirtoperiaatteen nojalla saadaan

$$(\forall n)(\forall m)[{}^*\underline{Z}\langle n\rangle \wedge {}^*\underline{Z}\langle m\rangle \wedge (n \leq m \leq n+1) \wedge (n \neq m) \rightarrow (m = n+1)]. \qquad (4.8)$$

□

Lause 4.12 siis sanoo, että hyperkokonaisluvut ovat jakautuneet tasaisin välimatkoin, ja kahden hyperkokonaisluvun etäisyys on vähintään yksi. Täten minkään hyperkokonaisluvun välittömään läheisyyteen ei voi kuulua toista hyperkokonaislukua. Toisin sanottuna minkään hyperkokonaisluvun monadiin ei kuulu toista hyperkokonaislukua.

Apulause 4.1. *Jos $x \in {}^*\mathbb{Z}$, niin $m(x) \cap {}^*\mathbb{Z} = \{x\}$.*

Todistus. Selvästi luku $x \in m(x)$, sillä $x - x = 0$ on infinitesimaalinen, joten $x \in m(x) \cap {}^*\mathbb{Z}$. Jos on olemassa toinen luku $y \in m(x) \cap {}^*\mathbb{Z}$, jolla $y \neq x$, niin $y \in m(x)$ ja $y \in {}^*\mathbb{Z}$. Oletetaan, että $x < y$. (Samanlainen päättely toimii tapauksessa $y < x$.) Tällöin voidaan edellisen lauseen nojalla päätellä, että $y \geq x + 1$, eli $x - y \geq 1$. Mutta koska $y \in m(x)$, niin erotuksen $x - y$ pitäisi olla infinitesimaalinen. Ei siis voi olla $y \neq x$ siten, että $y \in m(x) \cap {}^*\mathbb{Z}$. □

Hyperreaalilukujen joukossa voidaan esittää myös lattiafunktio, mikä kertoo jokaiselle hyperreaaliluvulle suurimman mahdollisen hyperkokonaisluvun, mikä on pienempi tai yhtäsuuri kuin annettu luku.

Lause 4.13. *Jokaista hyperreaalilukua $x \in {}^*\mathbb{R}$ kohti on olemassa hyperkokonaisluku $n \in {}^*\mathbb{Z}$ siten, että $n \leq x < n + 1$.*

Todistus. Reaaliluvuille voidaan esittää lattiafunktio $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, mikä kertoo jokaiselle reaaliluvulle suurimman mahdollisen kokonaisluvun, mikä on pienempi tai yhtäsuuri kuin kyseinen luku, eli $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$. Koska jokaisella $x \in \mathbb{R}$ pätee $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, niin lause

$$(\forall x)[\underline{R}\langle x \rangle \to \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1] \tag{4.9}$$

on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$. Siirtoperiaatteen nojalla saadaan

$$(\forall x)[{}^*\underline{R}\langle x \rangle \to {}^*\lfloor x \rfloor \leq x < {}^*\lfloor x \rfloor + 1]. \tag{4.10}$$

Lattiafunktion laajennuksesta ${}^*\lfloor \cdot \rfloor : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{Z}$ saadaan haluttu hyperkokonaisluku $n = {}^*\lfloor x \rfloor$. □

Koska lattiafunktio ${}^*\lfloor \cdot \rfloor$ kuvaa hyperreaaliluvut hyperkokonaisluvuiksi, niin sen avulla voidaan esittää hyperkokonaisluvuille edellä esitetyn kanssa yhtäpitävä määritelmä.

Lause 4.14. *Hyperkokonaislukujen joukko ${}^*\mathbb{Z} = \{x \in {}^*\mathbb{R} : \exists y \in {}^*\mathbb{R} : x = {}^*\lfloor y \rfloor\}$.*

Todistus. Koska $\lfloor n \rfloor = n$ pätee, joss $n \in \mathbb{Z}$, niin lauseet

$$(\forall n)[\underline{Z}\langle n \rangle \to \lfloor n \rfloor = n], \tag{4.11}$$

$$(\forall n)[\underline{R}\langle n \rangle \land \lfloor n \rfloor = n \to \underline{Z}\langle n \rangle] \tag{4.12}$$

ovat tosia struktuurissa $\mathcal{R}$. Siirtoperiaatteen nojalla saadaan

$$(\forall n)[{}^*\underline{Z}\langle n \rangle \to {}^*\lfloor n \rfloor = n], \tag{4.13}$$

$$(\forall n)[{}^*\underline{R}\langle n \rangle \land {}^*\lfloor n \rfloor = n \to {}^*\underline{Z}\langle n \rangle]. \tag{4.14}$$

eli kaikilla hyperkokonaisluvuilla $n \in {}^*\mathbb{Z}$ on olemassa hyperreaaliluku ${}^*\lfloor n \rfloor$ siten, että $n = \lfloor n \rfloor$, joten ${}^*\mathbb{Z} \subseteq \{x \in {}^*\mathbb{R} : \exists y \in {}^*\mathbb{R} : x = {}^*\lfloor y \rfloor\}$. Koska kaikille reaaliluvuille $x \in \mathbb{R}$ pätee $\lfloor x \rfloor = \lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor$, niin lause

$$(\forall x)[\underline{R}\langle x\rangle \rightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor] \tag{4.15}$$

on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$. Siirtoperiaatteen nojalla saadaan

$$(\forall x)[{}^*\underline{R}\langle x\rangle \rightarrow {}^*\lfloor x \rfloor = {}^*\lfloor {}^*\lfloor x \rfloor \rfloor]. \tag{4.16}$$

Olkoon seuraavaksi $x = {}^*\lfloor y \rfloor$ joillakin $x, y \in {}^*\mathbb{R}$. Koska $x = {}^*\lfloor y \rfloor = {}^*\lfloor {}^*\lfloor y \rfloor \rfloor = {}^*\lfloor x \rfloor$, eli $x = {}^*\lfloor x \rfloor$, joten $x \in {}^*\mathbb{Z}$, ja $\{x \in {}^*\mathbb{R} : \exists y \in {}^*\mathbb{R} : x = {}^*\lfloor y \rfloor\} \subseteq {}^*\mathbb{Z}$. $\square$

5. EPÄSTANDARDI ANALYYSI

Tämä luku käsittelee epästandardia analyysiä, missä hyperreaalilukuja ja niiden ominaisuuksia käytetään reaalianalyysissä. Analyysin perinteisille määritelmille, kuten esimerkiksi jonojen suppenemisen, jatkuvuuden ja derivaatan määritelmille, esitetään epästandardi vastine. Näin voidaan hyperreaalilukujen ominaisuuksien nojalla esittää todistuksia reaalianalyysin lauseille.

5.1 Lukujonot

Aloitetaan luku käymällä läpi jonoihin liittyviä määritelmiä ja lauseita. Merkitään jonoa $S : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ symbolilla $\langle s_n \rangle$, missä $s_n = s(n), n \in \mathbb{N}$. Jos jono $\langle s_n \rangle$ suppenee kohti raja-arvoa L, niin merkitään $\lim_{n\to\infty} s_n = L$.

Lause 5.1. *Jono $\langle s_n \rangle$ suppenee kohti raja-arvoa L, joss ${}^*s_n \simeq L$ kaikilla $n \in {}^*\mathbb{N}_\infty$.*

Todistus. Jos jono $\langle s_n \rangle$ suppenee kohti raja-arvoa L, niin kaikilla $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, on olemassa $k \in \mathbb{N}$ siten, että lause

$$(\forall n)[\underline{N}\langle n \rangle \wedge n > k \to |\underline{s}_n - L| < \epsilon] \tag{5.1}$$

on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$. Siirtoperiaatteen nojalla saadaan

$$(\forall n)[{}^*\underline{N}\langle n \rangle \wedge n > k \to |{}^*\underline{s}_n - L| < \epsilon]. \tag{5.2}$$

Kun valitaan $\epsilon \simeq 0 (\epsilon > 0)$, niin $|{}^*s_n - L| \simeq 0$, kun $n > k$. Koska $n > k$ kaikilla $n \in {}^*\mathbb{N}_\infty$, niin ${}^*s_n \simeq L$ kaikilla $n \in {}^*\mathbb{N}_\infty$.

Jos jono $\langle s_n \rangle$ ei suppene kohti arvoa L, niin löytyy sellainen reaalinen $\epsilon > 0$, että millään arvolla $k \in \mathbb{N}$ kaava 5.1 ei päde. On siis olemassa Skolemfunktio $\Psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

siten, että $\Psi(k) \geq k$ ja lause

$$(\forall k)[\underline{N}\langle k\rangle \rightarrow \underline{\Psi}(k) \geq k \wedge |\underline{s}_{\underline{\Psi}(k)} - L| \geq \epsilon] \tag{5.3}$$

on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$. Siirtoperiaatteen nojalla saadaan

$$(\forall k)[{}^*\underline{N}\langle k\rangle \rightarrow {}^*\underline{\Psi}(k) \geq k \wedge |{}^*\underline{s}_{{}^*\underline{\Psi}(k)} - L| \geq \epsilon]. \tag{5.4}$$

Kun valitaan $k \in {}^*\mathbb{N}_\infty$, niin $|{}^*s_{{}^*\Psi(k)} - L| \geq \epsilon$, eli ${}^*s_{{}^*\Psi(k)} \not\simeq L$. Koska ${}^*\Psi(k) \in \mathbb{N}_\infty$, niin ${}^*s_n \simeq L$ ei päde kaikilla $n \in {}^*\mathbb{N}_\infty$. □

Yllä oleva määritelmä on sikäli yllättävä, että se ei ota mitenkään kantaa jonon termeihin s_n, missä $n \in \mathbb{N}$. Toisaalta se vaatii, että jokainen jonon termi on infinitesimaalisen lähellä raja-arvoa L kaikilla $n \in \mathbb{N}_\infty$. Jono siis hajaantuu, jos jollakin $n \in \mathbb{N}_\infty$ termi ${}^*s_n$ on ääretön, tai sen standardiosa ei ole L.

Nyt voidaan edellisen määritelmän ja hyperreaalilukujen ominaisuuksien avulla todistaa seurava reaalianalyysin lause.

Lause 5.2. *Jos* $\lim_{n\to\infty} s_n = L$ *ja* $\lim_{n\to\infty} t_n = M$, *niin*

(i) $\lim_{n\to\infty}(s_n + t_n) = L + M$,

(ii) $\lim_{n\to\infty}(s_n t_n) = LM$,

(iii) $\lim_{n\to\infty}(\frac{s_n}{t_n}) = \frac{L}{M}$, *jos* $M \neq 0$.

Todistus. Koska ${}^*s_n \simeq L$ ja ${}^*t_n \simeq M$, niin lauseen 4.5 nojalla

(i) ${}^*s_n + {}^*t_n \simeq L + M$,

(ii) ${}^*s_n {}^*t_n \simeq LM$,

(iii) $\frac{{}^*s_n}{{}^*t_n} \simeq \frac{L}{M}$, jos $M \neq 0$, ja siten ${}^*t_n \not\simeq 0$.

□

Tarkastellaan seuraavaksi analyysissä tärkeitä Cauchy-jonoja.

Lause 5.3. *Jono $\langle s_n \rangle$ on Caychy-jono, joss ${}^*s_n \simeq {}^*s_m$ kaikilla $n, m \in {}^*\mathbb{N}_\infty$.*

Todistus. Jos jono $\langle s_n \rangle$ on Caychy-jono, niin kaikilla $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, on olemassa $k \in \mathbb{N}$ siten, että lause

$$(\forall n)(\forall m)[\underline{N}\langle n \rangle \wedge \underline{N}\langle m \rangle \wedge n > k \wedge m > k \rightarrow |\underline{s}_n - \underline{s}_m| < \epsilon] \tag{5.5}$$

on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$. Siirtoperiaatteen nojalla saadaan

$$(\forall n)(\forall m)[{}^*\underline{N}\langle n \rangle \wedge {}^*\underline{N}\langle m \rangle \wedge n > k \wedge m > k \rightarrow |{}^*\underline{s}_n - {}^*\underline{s}_m| < \epsilon]. \tag{5.6}$$

Kun valitaan $\epsilon \simeq 0 (\epsilon > 0)$, niin $|{}^*s_n - {}^*s_n| \simeq 0$, kun $n, m > k$. Koska $n, m > k$ kaikilla $n, m \in \mathbb{N}_\infty$, niin ${}^*s_n \simeq {}^*s_m$ kaikilla $n, m \in {}^*\mathbb{N}_\infty$.

Jos jono $\langle s_n \rangle$ ei ole Caychy-jono, niin löytyy sellainen reaalinen $\epsilon > 0$, että kaikilla $k \in \mathbb{N}$ kaava 5.5 ei päde. On siis olemassa kaksi Skolemfunktiota, $\Psi_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \Psi_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ siten, että $\Psi_1(k) \geq k$, $\Psi_2(k) \geq k$ ja lause

$$(\forall k)[\underline{N}\langle k \rangle \rightarrow \underline{\Psi_1}(k) \geq k \wedge \underline{\Psi_2}(k) \geq k \wedge |\underline{s}_{\underline{\Psi_1}(k)} - \underline{s}_{\underline{\Psi_2}(k)}| \geq \epsilon] \tag{5.7}$$

on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$. Siirtoperiaatteen nojalla saadaan

$$(\forall k)[{}^*\underline{N}\langle k \rangle \rightarrow {}^*\underline{\Psi_1}(k) \geq k \wedge {}^*\underline{\Psi_2}(k) \geq k \wedge |{}^*\underline{s}_{{}^*\underline{\Psi_1}(k)} - {}^*\underline{s}_{{}^*\underline{\Psi_2}(k)}| \geq \epsilon]. \tag{5.8}$$

Kun valitaan $k \in {}^*\mathbb{N}_\infty$, niin $|{}^*s_{{}^*\Psi_1(k)} - {}^*s_{{}^*\Psi_2(k)}| \geq \epsilon$, eli ${}^*s_{{}^*\Psi_1(k)} \not\simeq {}^*s_{{}^*\Psi_2(k)}$. Koska ${}^*\Psi_1(k), {}^*\Psi_2(k) \in {}^*\mathbb{N}_\infty$, niin ${}^*s_n \simeq {}^*s_m$ ei päde kaikilla $n, m \in {}^*\mathbb{N}_\infty$. □

Lause 5.4. *Jono $\langle s_n \rangle$ on rajoitettu, joss ${}^*s_n$ on äärellinen kaikilla $n \in {}^*\mathbb{N}_\infty$.*

Todistus. Jos jono $\langle s_n \rangle$ on rajoitettu, niin on olemassa $k \in \mathbb{N}$ siten, että lause

$$(\forall n)[\underline{N}\langle n \rangle \rightarrow |\underline{s}_n| \leq k] \tag{5.9}$$

on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$. Siirtoperiaatteen nojalla saadaan

$$(\forall n)[{}^*\underline{N}\langle n \rangle \rightarrow |{}^*\underline{s}_n| \leq k], \tag{5.10}$$

eli myös jokaisella $n \in \mathbb{N}_\infty$ pätee $|{}^*s_n| \leq k$, joten ${}^*s_n$ on äärellinen kaikilla $n \in {}^*\mathbb{N}_\infty$.

Jos jono ei ole rajoitettu, niin on olemassa Skolemfunktio $\Psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ siten, että lause

$$(\forall k)[\underline{N}\langle k\rangle \to \underline{\Psi}(k) > k \wedge |\underline{s}_{\underline{\Psi}(k)}| > k] \tag{5.11}$$

on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$. Siirtoperiaatteen nojalla saadaan

$$(\forall k)[{}^*\underline{N}\langle k\rangle \to {}^*\underline{\Psi}(k) > k \wedge |{}^*\underline{s}_{{}^*\underline{\Psi}(k)}| > k]. \tag{5.12}$$

Kun k on ääretön, niin myös ${}^*\Psi(k)$ on ääretön ja $|{}^*s_{{}^*\Psi(k)}| > k$. ${}^*s_n$ ei siis ole äärellinen kaikilla $n \in {}^*\mathbb{N}_\infty$. □

Lause 5.5. *Jokainen Cauchy-jono $\langle s_n\rangle$ on rajoitettu.*

Todistus. Olkoon $\langle s_n\rangle$ Cauchy-jono. Jos jono $\langle s_n\rangle$ ei ole rajoitettu, niin on olemassa Skolemfunktio $\Psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ siten, että lause

$$(\forall k)[\underline{N}\langle k\rangle \to \underline{\Psi}(k) > k \wedge |\underline{s}_{\underline{\Psi}(k)} - \underline{s}_k| > 1] \tag{5.13}$$

on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$. Siirtoperiaatteen nojalla saadaan

$$(\forall k)[{}^*\underline{N}\langle k\rangle \to {}^*\underline{\Psi}(k) > k \wedge |{}^*\underline{s}_{{}^*\underline{\Psi}(k)} - {}^*\underline{s}_k| > 1]. \tag{5.14}$$

Kun valitaan $k \in {}^*\mathbb{N}_\infty$, niin myös ${}^*\Psi(k) \in {}^*N_\infty$, ja ${}^*s_k \not\simeq {}^*s_{{}^*\Psi(k)}$. Tällöin lauseen 5.3 nojalla jono $\langle s_n\rangle$ ei voi olla Cauchy-jono, mikä on ristiriita. Siis jono $\langle s_n\rangle$ on rajoitettu. □

Lause 5.6. *Jono $\langle s_n\rangle$ suppenee, joss se on Cauchy-jono.*

Todistus. Jos jono $\langle s_n\rangle$ suppenee kohti raja-arvoa L, niin lauseen 5.1 nojalla $s_n \simeq L \simeq s_m$ kaikilla $s, m \in {}^*\mathbb{N}_\infty$, joten lauseen 5.3 nojalla jono $\langle s_n\rangle$ on Cauchy-jono.

Jos jono $\langle s_n\rangle$ on Cauchy-jono, niin lauseen 5.5 nojalla se on rajoitettu. Olkoon $k \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ ja $L = s_k$. Tällöin lauseen 5.3 nojalla $s_n \simeq s_k \simeq L$ kaikilla $n \in {}^*\mathbb{N}_\infty$, joten lauseen 5.1 nojalla jono $\langle s_n\rangle$ suppenee (kohti raja-arvoa L.) □

Esimerkki 5.1. (a) Olkoon $s_n = \frac{5n+1}{n-3}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin ${}^*s_n = \frac{5n+1}{n-3}$ kaikilla $n \in {}^*\mathbb{N}$. Koska kaikilla $n \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ ${}^*s_n = \frac{5+\frac{1}{n}}{1-\frac{3}{n}} \simeq 5$, niin jono $\langle s_n\rangle$ suppenee kohti raja-arvoa 5.

(b) Olkoon $\lim_{n\to\infty} s_n = L$ ja $t_n = 2s_n^2 - s_n$. Tällöin ${}^*t_n = 2{}^*s_n^2 - {}^*s_n \simeq 2L^2 - L$ kaikilla $n \in {}^*\mathbb{N}_\infty$, joten $\lim_{n\to\infty} k_n = 2L^2 - L$.

(c) Olkoon $s_n = (1+\frac{1}{n})^n$. Jono s_n on Cauchy-jono, sillä ${}^*s_n = (1+\frac{1}{n})^n \simeq e \simeq (1+\frac{1}{m})^m = {}^*s_m$ kaikilla $n, m \in {}^*\mathbb{N}_\infty$. Cauchy-jonona se on rajoitettu, ylärajana voidaan käyttää esimerkiksi arvoa $e+1$, ja suppeneva, ja suppenee kohti raja-arvoa e.

5.2 Topologian peruskäsitteitä

Esitetään seuraavaksi epästandardit määritelmät topologian peruskäsitteille, avoimelle ja suljetulle joukolle.

Lause 5.7. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}$. Tällöin*

(i) A on avoin, joss $m(a) \subset {}^*A$ kaikilla $a \in A$,

(ii) A on suljettu, joss $m(a) \cap {}^*A$ on tyhjä joukko kaikilla $a \in A'$.

Todistus. (i) Olkoon A avoin joukko ja $a \in A$. Joukon avoimuuden määritelmän nojalla on olemassa $\epsilon > 0$ siten, että

$$(\forall x)[\underline{R}\langle x\rangle \wedge |x-a| < \epsilon \rightarrow \underline{A}\langle x\rangle] \tag{5.15}$$

on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$. Siirtoperiaatteen nojalla saadaan

$$(\forall x)[{}^*\underline{R}\langle x\rangle \wedge |x-a| < \epsilon \rightarrow {}^*\underline{A}\langle x\rangle]. \tag{5.16}$$

Kun valitaan $\epsilon \simeq 0 (\epsilon > 0)$, saadaan

$$(\forall x)[{}^*\underline{R}\langle x\rangle \wedge |x-a| \simeq 0 \rightarrow {}^*\underline{A}\langle x\rangle], \tag{5.17}$$

eli $m(a) \subset {}^*A$.

Kääntäen, olkoon seuraavaksi $m(a) \subset {}^*A$ jokaisella $a \in A$. Jos A ei ole avoin, niin on olemassa $a \in A$ siten, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ voidaan löytää alkio $x_n \in A'$, millä $|x_n - a| < 1/n$. Määritellään Skolemfunktio $\Psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ seuraavasti: $\Psi(n) = x_n$. Siten lause

$$(\forall n)[\underline{N}\langle n\rangle \rightarrow \underline{A}'\langle \underline{\Psi}(n)\rangle \wedge |\underline{\Psi}(n) - a| < 1/n] \tag{5.18}$$

on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$. Siirtoperiaatteen nojalla saadaan

$$(\forall n)[{}^*\underline{N}\langle n\rangle \to {}^*\underline{A}'\langle {}^*\underline{\Psi}(n)\rangle \wedge |{}^*\underline{\Psi}(n) - a| < 1/n]. \tag{5.19}$$

Kaikilla $m \in \mathbb{N}_\infty$ on siis olemassa luku $x_m = {}^*\Psi(m)$ siten, että $x_m \in {}^*A'$ ja $|x_m - a| < 1/m \simeq 0$, eli $x_m \in m(a)$, mikä on ristiriita.

(ii) Olkoon A suljettu joukko. Tällöin A' on avoin joukko, joten edellisen kohdan nojalla $m(a) \subset {}^*A'$ kaikilla $a \in A'$, eli jokaiselle $x \in m(a)$ pätee myös $x \in {}^*A'$. Koska $x \notin {}^*A$, niin $m(a) \cap {}^*A = \emptyset$.

Kääntäen, olkoon seuraavaksi $m(a) \cap {}^*A = \emptyset$ jokaisella $a \in A'$ ja $x \in m(a)$. Tällöin $x \notin {}^*A$, eli $x \in {}^*A'$, joten $m(a) \subset {}^*A'$ kaikilla $a \in A'$. Jälleen edellisen kohdan nojalla A' on avoin, eli A on suljettu.

□

Palautetaan seuraavaksi mieleen joukon kasautumispisteen ja sulkeuman määritelmät, ja esitetään vastaavat epästandardit määritelmät.

Määritelmä 5.1. Piste $x \in \mathbb{R}$ on joukon $A \subseteq \mathbb{R}$ *kasautumispiste*, jos jokaisella luonnollisella luvulla $n \in \mathbb{N}$ on olemassa piste $y \in A, y \neq x$, siten, että $|y - x| < 1/n$. Joukon A kasautumispisteiden joukkoa merkitään symbolilla $\hat{A}$ ja joukon A *sulkeuma* on joukko $\overline{A} = A \cup \hat{A}$.

Lause 5.8. *Piste $x \in \mathbb{R}$ on joukon $A \subseteq \mathbb{R}$ kasautumispuste, joss on olemassa piste $y \in {}^*A, y \neq x$, siten, että $y \simeq x$.*

Todistus. Jos x on joukon A kasautumispiste, niin jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on olemassa piste $y \in A, y \neq x$, siten, että $|y - x| < 1/n$. Määritellään Skolemfunktio $\Psi : \mathbb{N} \to A$ yhdistämällä jokaiseen $n \in \mathbb{N}$ kyseinen piste $y \in A$. Tällöin lause

$$(\forall n)[\underline{N}\langle n\rangle \to \underline{\Psi}(n) \neq x \wedge \underline{A}\langle \underline{\Psi}(n)\rangle \wedge |x - \underline{\Psi}(n)| < 1/n] \tag{5.20}$$

on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$. Siirtoperiaatteen nojalla saadaan

$$(\forall n)[{}^*\underline{N}\langle n\rangle \to {}^*\underline{\Psi}(n) \neq x \wedge {}^*\underline{A}\langle {}^*\underline{\Psi}(n)\rangle \wedge |x - {}^*\underline{\Psi}(n)| < 1/n]. \tag{5.21}$$

Kaikilla $n \in \mathbb{N}_\infty$ $x \simeq {}^*\Psi(n)$, joten on olemassa piste $y \in {}^*A, y \neq x$, siten, että $y \simeq x$.

Jos x ei ole joukon A kasautumispiste, niin on olemassa $k \in \mathbb{N}$ siten, että jokaisella $y \in A$, $y \neq x$, $|y-x| \geq 1/k$. Lause

$$(\forall y)[\underline{A}\langle y\rangle \wedge y \neq x \rightarrow |y-x| \geq 1/k] \tag{5.22}$$

on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$. Siirtoperiaatteen nojalla saadaan

$$(\forall y)[{}^*\underline{A}\langle y\rangle \wedge y \neq x \rightarrow |y-x| \geq 1/k], \tag{5.23}$$

eli kaikilla $y \in {}^*A, y \neq x$, pätee $|y-x| \geq 1/k$. Ei siis ole olemassa pistettä $y \in {}^*A, y \neq x$, siten, että $y \simeq x$. □

Lause 5.9. *Joukon $A \subseteq R$ sulkeuma $\overline{A}$ on joukko $\{x \in \mathbb{R} : m(x) \cap {}^*A \neq \emptyset\}$.*

Todistus. Olkoon $a \in \overline{A}$. Tällöin $a \in A$ tai $a \in \hat{A}$. Jos $a \in A$, niin $a \in {}^*A$ ja $a \in m(a)$. Jos $a \in \hat{A}$, niin lauseen 5.8 mukaan on olemassa luku $x \in {}^*A$ siten, että $a \simeq x$, joten $x \in m(a)$, eli $m(a) \cap {}^*A \neq \emptyset$.

Jos $a \in \{x \in \mathbb{R} : m(x) \cap {}^*A \neq \emptyset\}$, niin $m(a) \cap {}^*A \neq \emptyset$. Jos $a \in {}^*A$, niin $a \in \overline{A}$. Jos $a \notin {}^*A$, niin on olemassa $x \in {}^*A$ siten, että $x \in m(a)$, eli $a \simeq x$. Lauseen 5.8 mukaan piste a on joukon A kasautumispiste, eli $a \in \overline{A}$. □

Epästandarien määritelmien avulla voidaan todistaa seuraavat perinteiset tulokset.

Lause 5.10. *Kaikilla joukoilla $A, B \subseteq \mathbb{R}$ pätee*

(i) $A \subseteq \overline{A}$,

(ii) $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$,

(iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

(iv) $\overline{A}$ *on suljettu,*

(v) *jos B on suljettu ja $A \subseteq B$, niin $\overline{A} \subseteq B$,*

(vi) *jos A on suljettu, niin $\overline{A} = A$.*

Todistus. (i) Seuraa suoraan sulkeuman määritelmästä $\overline{A} = A \cup \hat{A}$.

(ii) Kohdan (i) nojalla $\overline{A} \subseteq \overline{\overline{A}}$. Olkoon $x \in \overline{\overline{A}}$, mutta $x \notin \overline{A}$. Tällöin $x \in \hat{\overline{A}}$, joten kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on olemassa $y \in \overline{A}$ siten, että $|x - y| < 1/n$. Lauseen 5.9 nojalla on olemassa $z \in {}^*A$ siten, että $|x - z| < 1/n$. Toisaalta, jos $x \notin \overline{A}$, niin on olemassa $n \in \mathbb{N}$ siten, että lause

$$(\forall z)[\underline{A}\langle z\rangle \to |x - z| > 1/n] \tag{5.24}$$

on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$. Siirtoperiaatteen nojalla saadaan

$$(\forall z)[{}^*\underline{A}\langle z\rangle \to |x - z| > 1/n], \tag{5.25}$$

mikä on ristiriita. Siis $x \in \overline{A}$, joten $\overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$.

(iii) Olkoon $x \in \overline{A \cup B}$. Jos $x \in A \cup B$, niin tällöin $x \in A$ tai $x \in B$, joten $x \in \overline{A}$ tai $x \in \overline{B}$, ja $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Jos $x \notin A \cup B$, niin määritelmän 5.1 nojalla $x \in \widehat{A \cup B}$, jolloin lauseen 5.8 mukaan on olemassa piste $y \in {}^*(A \cup B)$ siten, että $y \neq x$ ja $y \simeq x$. Koska esimerkin 2.2 kohdan (d) nojalla ${}^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B$, eli $y \in {}^*A$ tai $y \in {}^*B$. Piste x on siis joko joukon A tai joukon B kasautumispiste, eli $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

Olkoon seuraavaksi $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Jos $x \in A$, niin luonnollisesti $x \in A \cup B$ ja $x \in \overline{A \cup B}$. Jos $x \in \hat{A}$, niin edelleen lauseen 5.8 mukaan on olemassa piste $y \in {}^*A$ siten, että $y \neq x$ ja $y \simeq x$. Luonnollisesti $y \in {}^*(A \cup B)$, joten piste x on myös joukon $A \cup B$ kasautumispiste. Vastaavasti voidaan päätellä myös tapauksessa $x \in \overline{B}$. Siis $x \in \overline{A \cup B}$.

(iv) Olkoon $x \in \overline{A}'$. Tällöin lauseen 5.9 mukaan $m(x) \cap {}^*A = \emptyset$, eli lauseen 5.7 kohdan (ii) nojalla joukko $\overline{A}$ on suljettu.

(v) Olkoon B suljettu, $A \subseteq B$ ja $x \in \overline{A}$. Jos $x \in A$, niin tietysti myös $x \in B$. Jos $x \in \hat{A}$, niin on olemassa $y \in {}^*A$ siten, että $y \neq x$ ja $y \simeq x$. Koska $A \subseteq B$, niin suoraan siirtoperiaatetta käyttämällä voidaan näyttää, että ${}^*A \subseteq {}^*B$, eli $y \in {}^*B$. Koska $y \simeq x$, niin $y \in m(x)$, joten $m(y) \cap {}^*B$ ei ole tyhjä joukko. Siis lauseen 5.7 kohdan (ii) nojalla $x \in B$.

(vi) Olkoon A suljettu. (i) kohdan nojalla $A \subseteq \overline{A}$. Koska $A \subseteq A$ ja A on suljettu, niin kohdan (v) nojalla $\overline{A} \subseteq A$.

□

5.3 Funktion kulku

Seuraavana vuorossa on funktioiden raja-arvot ja jatkuvuus.

Lause 5.11. *Olkoon funktio f määritelty joukossa $A \subseteq \mathbb{R}$ ja $a \in \hat{A}$. Tällöin $\lim_{x\to a} f(x) = L$, joss $^*f(x) \simeq L$ kaikilla $x \in {}^*A$, joilla $x \simeq a$, mutta $x \neq a$.*

Todistus. Jos $\lim_{x\to a} f(x) = L$, niin kaikilla $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, on olemassa $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, siten, että $|f(x) - L| < \epsilon$, jos $0 < |x - a| < \delta$ ja $x \in A$. Tällöin jokaiselle $\epsilon > 0$ ja sitä vastaavalle $\delta > 0$ voidaan kirjoittaa seuraava lause

$$(\forall x)[\underline{A}\langle x\rangle \wedge 0 < |x-a| < \delta \to |\underline{f}(x) - L| < \epsilon], \tag{5.26}$$

mikä on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$. Siirtoperiaatteen nojalla jos $x \in {}^*A$ ja $0 < |x-a| < \delta$, niin $|{}^*f(x) - L| < \epsilon$ kaikilla $\epsilon > 0$. Tarkistellaan tapausta, missä $x \simeq a, x \neq a$, ja valitaan $\epsilon \simeq 0, \epsilon \neq 0$. Koska $x \simeq a, x \neq a$, niin $0 < |x - a| < \delta$, missä δ saadaan valitusta arvosta ϵ. Tällöin $^*f(x) \simeq L$ kaikilla $x \in {}^*A$, joilla $x \simeq a$, mutta $x \neq a$.

Jos raja-arvoa $\lim_{x\to a} f(x)$ ei ole olemassa, tai $\lim_{x\to a} f(x) \neq L$, niin on olemassa $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, ja Skolemfunktio $\Psi : \mathbb{N} \to A - \{a\}$ siten, että $|\Psi(n) - a| < 1/n$ ja $|f(\Psi(n)) - L| \geq \epsilon$. Lause

$$(\forall n)[\underline{N}\langle n\rangle \to \underline{A}\langle\underline{\Psi}(n)\rangle \wedge 0 < |\underline{\Psi}(n) - a| < 1/n \wedge |\underline{f}(\underline{\Psi}(n)) - L| \geq \epsilon] \tag{5.27}$$

on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$. Siirtoperiaatteen nojalla $|{}^*f({}^*\Psi(n)) - L| \geq \epsilon$, $^*\Psi(n) \in {}^*A$ ja $0 < |{}^*\Psi(n) - a| < 1/n$ kaikilla $n \in {}^*N$. Kun $n \in {}^*N_\infty$, niin $^*\Psi(n) \simeq a$ ja $|{}^*f({}^*\Psi(n)) - L| \geq \epsilon$, eli $^*f({}^*\Psi(n)) \not\simeq L$. On siis olemassa $x \in {}^*A$, jolle $x \simeq a$ ja $x \neq a$, mutta $^*f(x) \not\simeq L$. □

Lause 5.12. *Olkoon funktio f määritelty joukossa $A \subseteq \mathbb{R}$ ja $a \in \hat{A}$. Tällöin raja-arvo $\lim_{x\to a} f(x)$ on olemassa, joss $^*f(x) \simeq {}^*f(y)$ kaikilla $x, y \in {}^*A$, joilla $x \simeq a$, $y \simeq a$, $x \neq a$ ja $y \neq a$.*

Todistus. Jos raja-arvo $\lim_{x\to a} f(x)$ on olemassa, niin merkitään $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Lauseen 5.11 nojalla kaikilla $x \in {}^*A$, joilla $x \simeq a$ ja $x \neq a$, pätee $^*f(x) \simeq L$. Siis kaikilla $x, y \in {}^*A$, joilla $x \simeq a$, $y \simeq a$, $x \neq a$ ja $y \neq a$, pätee $^*f(x) \simeq L$ ja $^*f(y) \simeq L$, eli $^*f(x) - L \simeq 0$ ja $^*f(y) - L \simeq 0$. Lauseen 4.2 kohdan (i) mukaan kahden infinitesimaalisen luvun erotus on infinitesimaalinen, joten $^*f(x) - {}^*f(y) = ({}^*f(x) - L) - ({}^*f(y) - L)$ on infinitesimaalinen, eli $^*f(x) \simeq {}^*f(y)$.

Olkoon $y \in A$, $y \simeq a$, $y \neq a$ ja $f(y) = L$. Jos raja-arvoa $\lim_{x \to a} f(x)$ ei ole olemassa, niin lauseen 5.11 nojalla kaikilla $L \in A$ on olemassa $x \in {}^*A$, jolla $x \simeq a$, $x \neq a$ ja ${}^*f(x) \not\simeq L$, joten on siis olemassa ehdot täyttävä $x \in {}^*A$ siten, että ${}^*f(x) \not\simeq {}^*f(y)$. □

Lause 5.13. *Olkoon funktio f määritelty joukossa $A \subseteq \mathbb{R}$. Funktio f on jatkuva kohdassa $a \in A$, joss ${}^*f(x) \simeq f(a)$ kaikilla $x \in {}^*A$, joilla $x \simeq a$.*

Todistus. Jos funktio f on jatkuva kohdassa a, niin raja-arvo $\lim_{x \to a} f(x)$ on olemassa ja $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Lauseen 5.11 nojalla ${}^*f(x) \simeq f(a)$ kaikilla $x \in {}^*A$, joilla $x \simeq a$, mutta $x \neq a$. Tietysti myös pisteessä $x = a$ pätee ${}^*f(x) = f(a)$.

Jos ${}^*f(x) \simeq f(a)$ kaikilla $x \in {}^*A$, joilla $x \simeq a$, niin lauseen 5.11 nojalla $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, eli funktio f on jatkuva kohdassa a. □

Lause 5.14. *Olkoon joukossa $A \subseteq \mathbb{R}$ määritetyt funktiot f ja g jatkuvia kohdassa $a \in A$, ja joukossa $f(A)$ määritelty funktio F jatkuva kohdassa $f(a)$. Tällöin*

(i) Funktio $f(x) + g(x)$ on jatkuva kohdassa $a \in A$,

(ii) Funktio $f(x)g(x)$ on jatkuva kohdassa $a \in A$,

(iii) Jos $g(a) \neq 0$, niin funktio $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ on jatkuva kohdassa $a \in A$.

(iv) Funktio $h(x) = F(f(x))$ on jatkuva kohdassa $f(a)$.

Todistus. Todistus seuraa lauseesta 4.5, sillä kaikilla $x \simeq a$ pätee

(i) ${}^*f(x) + {}^*g(x) \simeq f(x) + g(x)$,

(ii) ${}^*f(x){}^*g(x) \simeq f(x)g(x)$,

(iii) $\dfrac{{}^*f(x)}{{}^*g(x)} \simeq \dfrac{f(x)}{g(x)}$,

(iv) ${}^*h(x) = {}^*F({}^*f(x)) \simeq F(g(a)) = h(a)$.

□

Todistetaan seuraavaksi jatkuvien funktioiden väliarvolause.

Lause 5.15. *Olkoon f jatkuva funktio suljetulla reaalilukuvälillä $[a,b]$. Tällöin jokaista lukua $y \in \mathbb{R}$ kohti, jolla $f(a) < y < f(b)$, on olemassa luku $x \in [a,b]$ siten, että $f(x) = y$.*

Todistus. Yleisyyttä rikkomatta voidaan olettaa, että $f(a) \leq f(b)$, sillä tapaus $f(a) \geq f(b)$ voidaan todistaa samalla tavalla valitsemalla funktioksi $g(x) = -f(x)$. Lisäksi voidaan olettaa, että $a < b$ ja $f(a) < x < f(b)$, sillä tapaukset $y = f(a)$ ja $y = f(b)$ ovat triviaaleja. Valitaan jokin luonnollinen luku $n \in \mathbb{N}$, jolloin väli $[a,b]$ voidaan jakaa osaväleihin (n kappaletta) seuraavasti:

$$\left[a, a + \frac{b-a}{n}\right], \left[a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n}\right], \ldots, \left[a + (n-1)\frac{b-a}{n}, a + n\frac{b-a}{n}\right].$$

Merkitään $\delta = \dfrac{b-a}{n}$. Koska $f(a) < y < f(b)$, niin jollakin osavälillä täytyy luvun y olla funktion f päätepisteiden arvojen välissä. Siis on olemassa luonnollinen luku $m \leq n$ siten, että $f(a + (m-1)\delta) \leq y < f(a + m\delta)$. Koska kaikilla luonnollisilla luvuilla n löytyy sitä vastaava luku m, joka toteuttaa edellä esitetyt ehdot, niin voidaan muodostaa Skolemfunktio $\Psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ siten, että $\Psi(n) = m$. Tällöin lause

$$(\forall n)[\underline{N}\langle n\rangle \to \underline{f}(a + (\underline{\Psi}(n) - 1)\delta) \leq y < \underline{f}(a + \underline{\Psi}(n)\delta)] \tag{5.28}$$

on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$. Siirtoperiaatteen nojalla saadaan

$$(\forall n)[{}^*\underline{N}\langle n\rangle \to {}^*\underline{f}(a + ({}^*\underline{\Psi}(n) - 1)\delta) \leq y < {}^*\underline{f}(a + {}^*\underline{\Psi}(n)\delta)]. \tag{5.29}$$

Valitaan muuttujan n arvoksi jokin $m \in \mathbb{N}_\infty$, ja merkitään $x = st(f(a + {}^*\Psi(m)\delta))$. Näytetään, että $x \in [a,b]$ ja $f(x) = y$. Koska $a \leq a + {}^*\Psi(m)\delta \leq b$, niin lauseiden 4.8 ja 4.9 mukaan $a \leq st(f(a + {}^*\Psi(m)\delta)) \leq b$, eli $x \in [a,b]$. Nyt $\delta = \dfrac{b-a}{m}$ on ääretön, joten $a + {}^*\Psi(m)\delta \simeq a + ({}^*\Psi(m) - 1)\delta$. Koska funktio f on jatkuva, niin ${}^*f(a + {}^*\Psi(m)\delta) \simeq {}^*f(a + ({}^*\Psi(m) - 1)\delta) \simeq f(x)$. Siirtoperiaatteen nojalla saadusta lauseesta 5.29 voidaan edelleen lauseiden 4.8 ja 4.9 avulla päätellä, että $f(x) = st(f(a + ({}^*\Psi(m) - 1)\delta)) \leq y \leq st(f(a + {}^*\Psi(m)\delta)) = f(x)$, joten $f(x) = y$.

□

Funktiolla f on maksimi pisteessä a, jos kaikilla funktion määrittelyjoukon pisteillä x pätee $f(a) \geq f(x)$. Vastaavasti piste a on minimi, jos kaikilla määrittelyjoukon pisteillä x pätee $f(a) \leq f(x)$. Siirtoperiaatteen avulla voidaan helposti näyttää, että jos funktiolla f on maksimikohta (minimikohta) pisteessä a, niin funktiolla ${}^*f$ on maksimikohta (minimikohta) pisteessä a. Esitetään seuraavaksi epästandardi määritelmä paikalliselle maksimi- ja minimikohdalle.

Lause 5.16. *Funktiolla f on pisteessä $a \in \mathbb{R}$ paikallinen maksimikohta (minimikohta), joss ${}^*f(x)$ on määritelty ja ${}^*f(a) \geq {}^*f(x)$ (${}^*f(a) \leq {}^*f(x)$) kaikilla hyperreaaliluvuilla $x \simeq a$.*

Todistus. Olkoon pisteessä a funktion f paikallinen maksimikohta. Tällöin on olemassa reaaliluku $r \in \mathbb{R}$ siten, että $f(a) \geq f(x)$ kaikilla $x \in (a-r, a+r)$. Muodostetaan lause

$$(\forall x)[\underline{R}\langle x\rangle \wedge a - r < x < a + r \rightarrow f(a) \geq f(x)], \tag{5.30}$$

joka on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$. Siirtoperiaatteen nojalla saadaan

$$(\forall x)[{}^*\underline{R}\langle x\rangle \wedge a - r < x < a + r \rightarrow {}^*f(a) \geq {}^*f(x)]. \tag{5.31}$$

Koska kaikilla $x \simeq a$ pätee $a - r < x < a + r$, niin ${}^*f(x)$ on määritelty, ja ${}^*f(a) \geq {}^*f(x)$.

Oletetaan seuraavaksi, että piste a ei ole funktion f paikallinen maksimikohta. Mikäli ei ole olemassa sellaista ympäristöä $(a-r, a+r)$, että $f(x)$ olisi määritelty kaikilla $x \in (a-r, a+r)$, niin voidaan määritellä Skolemfunktio $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ siten, että lause

$$(\forall r)[\underline{R}\langle r\rangle \wedge a - r < \underline{\Psi}(r) < a + r \rightarrow \underline{dom(f)'}\langle \underline{f}(\underline{\Psi}(r))\rangle] \tag{5.32}$$

on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$. Siirtoperiaatteen nojalla saadaan

$$(\forall r)[{}^*\underline{R}\langle r\rangle \wedge a - r < {}^*\underline{\Psi}(r) < a + r \rightarrow {}^*\underline{dom(f)'}\langle {}^*\underline{f}({}^*\underline{\Psi}(r))\rangle]. \tag{5.33}$$

Määritelmästä 2.10 seuraa, että ${}^*(dom(f)') = ({}^*dom(f))'$. Kun valitaan $r \simeq a$, niin on olemassa ympäristöön $(r-a, r+a)$ kuuluva luku, joka ei kuulu joukkoon ${}^*dom(f)$. Lauseen 2.9 nojalla on olemassa luku $x \simeq a$ siten, että $x \notin dom({}^*f)$, eli ${}^*f(x)$ ei ole määritelty.

Mikäli jokaiseen ympäristöön $(r-a, r+a)$ kuuluu luku x siten, että $f(a) < f(x)$, niin voidaan määritellä Skolemfunktio $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, joka liittää jokaiseen ympäristöön tällaisen alkion. Tällöin lause

$$(\forall r)[\underline{R}\langle r\rangle \wedge a - r < \underline{\Psi}(r) < a + r \rightarrow \underline{f}(a) < \underline{f}(\underline{\Psi}(r))] \tag{5.34}$$

on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$. Siirtoperiaatteen nojalla saadaan

$$(\forall r)[{}^*\underline{R}\langle r\rangle \wedge a - r < {}^*\underline{\Psi}(r) < a + r \rightarrow {}^*\underline{f}(a) < {}^*\underline{f}({}^*\underline{\Psi}(r))]. \tag{5.35}$$

Kun valitaan $r \simeq a$, niin on olemassa ympäristöön $(a-r, a+r)$ kuuluva luku $x \simeq a$ siten, että ${}^*f(a) < {}^*f(x)$. $\square$

5.4 Funktion derivaatta

Tarkastellaan vielä luvun lopuksi funktion derivaattaa.

Lause 5.17. *Olkoon funktio f määritelty pisteessä $a \in \mathbb{R}$. Derivaatta $f'(a)$ on olemassa, joss jokaiselle infinitesimaaliluvulle $h \neq 0$ pätee:*

(i) ${}^*f(a+h)$ *on määritelty,*

(ii) $\dfrac{{}^*f(a+h) - f(a)}{h}$ *on äärellinen ja*

(iii) $st(\dfrac{{}^*f(a+h) - f(a)}{h})$ *on riippumaton infinitesimaalin h valinnasta.*

Tällöin derivaatta $f'(a) = st(\frac{{}^*f(a+h)-f(a)}{h})$.

Todistus. Olkoon funktio f määritelty pisteessä $a \in \mathbb{R}$ ja olkoon derivaatta $f'(a)$ olemassa. Tällöin $f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, joten lauseen 5.11 nojalla $f'(a) \simeq \dfrac{{}^*f(a+h) - f(a)}{h}$ kaikilla $h \simeq 0$, $h \neq 0$. Tästä voidaan päätellä, että ${}^*f(a+h)$ on määritelty, $\dfrac{{}^*f(a+h) - f(a)}{h}$ on äärellinen, koska $f'(a)$ on äärellinen, ja $st(\dfrac{{}^*f(a+h) - f(a)}{h})$ on aina riippumaton infinitesimaalin h valinnasta, sillä koska $f'(a) \simeq \dfrac{{}^*f(a+h) - {}^*f(a)}{h}$ kaikilla $h \simeq 0$, $h \neq 0$, niin lauseen 4.7 mukaan $f'(a)$ on yksikäsitteinen riippumatta infinitesimaalin h arvosta ja $f'(a) = st(\dfrac{{}^*f(a+h) - f(a)}{h})$.

Vastaavasti, jos kohdat (i)-(iii) pätevät, niin käänten voidaan päätellä, että derivaatta $f'(a)$ on olemassa, ja $f'(a) = st(\frac{{}^*f(a+h) - f(a)}{h})$. □

Lause 5.18. *Jos funkito f on derivoituva pisteessä $x \in \mathbb{R}$, niin f on jatkuva pisteessä x.*

Todistus. Olkoon funkito f on derivoituva pisteessä $x \in \mathbb{R}$. Tällöin $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, joten lauseen 5.11 nojalla $f'(x) \simeq \frac{{}^*f(x+h) - f(x)}{h}$ kaikilla $h \simeq 0$, $h \neq 0$. Koska $hf'(x) \simeq {}^*f(x+h) - f(x)$ ja $h \simeq 0$, niin ${}^*f(x+h) \simeq f(x)$, joten lauseen 5.13 nojalla funktio f on jatkuva pisteessä x. □

Lause 5.19. *Olkoon $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Jos funktio $f : (a, b) \to (a, b)$ on derivoituva ja saavuttaa paikallisen maksimin (minimin) pisteessä $x \in (a, b)$, niin funktion derivaatta $f'(x) = 0$.*

Todistus. Olkoon $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $x \in (a, b)$, funktio $f : (a, b) \to (a, b)$ derivoituva pisteessä x ja funktion f paikallinen maksimi pisteessä x. Koska piste x on paikallinen maksimi, niin on olemassa luku $y \in \mathbb{R}_+$ siten, että lause

$$(\forall h)[\underline{R}\langle h\rangle \wedge a < x + h < b \wedge |h| < y \to \underline{f}(x + h) < f(x)] \tag{5.36}$$

on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$. Siirtoperiaatteen nojalla saadaan

$$(\forall h)[{}^*\underline{R}\langle h\rangle \wedge a < x + h < b \wedge |h| < y \to {}^*\underline{f}(x + h) < f(x)]. \tag{5.37}$$

Olkoon $h \in {}^*\mathbb{R}$ infinitesimaalinen. Tällöin $|h| < y$, joten $\frac{{}^*f(x+h) - f(x)}{h} < 0$, kun $h > 0$, ja $\frac{{}^*f(x+h) - f(x)}{h} > 0$, kun $h < 0$. Lauseen 4.8 nojalla $st(\frac{{}^*f(x+h) - f(x)}{h}) \leq 0$, kun $h > 0$, ja $st(\frac{{}^*f(x+h) - f(x)}{h}) \geq 0$, kun $h < 0$. Koska funktio f on derivoituva pisteessä x, niin lauseen 5.17 mukaan $st(\frac{{}^*f(a+h) - f(a)}{h})$ on riippumaton infinitesimaalin h valinnasta. Siis täytyy olla $st(\frac{{}^*f(x+h) - f(x)}{h}) = 0$, eli $f'(x) = 0$. Vastaavalla tavalla voidaan päätellä, että $f'(x) = 0$, kun piste x on paikallinen minimi. □

Lause 5.20. *Olkoon funktiot f ja g derivoituvia pisteessä x ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin funktiot $f + g$, fg ja $\frac{f}{g}$ $(g(x) \neq 0)$ ovat derivoituvia pisteessä x, ja* *(i)* $(cf)'(x) = cf'(x)$,

(ii) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,

(iii) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

(iv) $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Todistus. Olkoon $h \in {}^*\mathbb{R}$ infinitesimaalinen. Tällöin lausetta 5.17 käyttäen saadaan:

(i) $(cf)'(x) \simeq \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = c\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \simeq cf'(x)$.

(ii) $(f+g)'(x)$

$$\simeq \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$
$$\simeq f'(x) + g'(x).$$

(iii) $(fg)'(x)$

$$\begin{aligned}
&\simeq \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= g(x+h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \simeq f'(x)g(x) + f(x)g'(x),
\end{aligned}$$

koska g on derivoituvana funktiona jatkuva, eli lauseen 5.13 mukaan $g(x) \simeq g(x+h)$ kaikilla $h \simeq 0$.

(iv) $(\frac{f}{g})'(x)$

$$\begin{aligned}
&\simeq \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \frac{\frac{f(x+h)g(x)}{g(x+h)g(x)} - \frac{f(x)g(x+h)}{g(x)g(x+h)}}{h} \\
&= \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} \\
&= \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x) - f(x)g(x)}{hg(x)g(x+h)} \\
&= \frac{g(x)(f(x+h) - f(x)) - f(x)(g(x+h) - g(x))}{hg(x)g(x+h)} \\
&= \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) - f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x)g(x+h)} \\
&\simeq \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)},
\end{aligned}$$

koska g on jälleen derivoituvana funktiona jatkuva, joten lauseen 5.13 mukaan $g(x) \simeq g(x+h)$ kaikilla $h \simeq 0$.

□

Tarkastellaan seuraavaksi pisteessä $x \in \mathbb{R}$ derivoituvan funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kulkua pisteen x läheisyydessä. Pisteessä x funktio saa arvon $f(x)$. Kun muuttujan arvoa kasvatetaan infinitesimaalisella luvulla Δx, niin funktion arvon muutos on $f(x + \Delta x) - f(x)$. Merkitään funktion arvon muutosta

$$\Delta y = {}^*f(x + \Delta x) - f(x), \tag{5.38}$$

jolloin derivaatta on määritelmän 5.17 mukaan $f'(x) = st(\frac{\Delta y}{\Delta x})$. Funktion f *differenssi* (differential) on

$$dy = f'(x)\Delta x, \tag{5.39}$$

joka on siis olemassa vain, jos $f'(x)$ on olemassa, ja se riippuu pisteestä x ja muutoksesta Δx. Kun muutosta Δx merkitään symbolilla dx, saadaan käyttöön tavanomainen yhtälö $f'(x) = \frac{dx}{dy}$.

Piirretään samaan koordinaatistoon funktio f ja pisteen $(x, f(x))$ kautta kulkeva suora (tangentti), jonka kulmakerroin on $f'(x)$. Geometrisesti tarkasteltuna Δy on koordinaatin y muutos, kun kuljetaan matka Δx funktion f kuvaajaa pitkin. Vastaavasti dy on koordinaatin y muutos, kun kuljetaan matka Δx tangentin kuvaajaa pitkin. Seuraava lause antaa hyödyllisen muodon muutokselle Δy.

Lause 5.21. *Olkoon funktio f derivoituva pisteessä x ja $\Delta x \simeq 0$. Tällöin Δy on infinitesimaalinen, ja*

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \epsilon\Delta x, \tag{5.40}$$

missä ϵ on infinitesimaaliluku, joka on lukujen c ja Δx muuttuja.

Todistus. Jos $\Delta x = 0$, niin $\Delta y = 0 = f'(x)\Delta x$, eli $\epsilon = 0$.

Jos taas $\Delta x \neq 0$, niin $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \simeq f'(x)$, joten jollakin infinitesimaaliluvulla ϵ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \epsilon$, joten voidaan siis kirjoittaa $\Delta y = f'(x)\Delta x + \epsilon\Delta x$. □

Lauseen 5.21 mukaan siis funktion differenssi dy ja funktion arvon muutos Δy ovat infinitesimaalisen lähellä toisiaan. Tämän lauseen avulla voidaan todistaa ketjusääntö.

Lause 5.22. *Olkoon $h(t) = f(g(t))$ yhdistetty funktio. Jos derivaatat $f'(g(t))$ ja $g'(t)$ ovat olemassa, niin derivaatta $h'(t)$ on olemassa, ja $h'(t) = f'(g(t))g'(t)$.*

Todistus. Olkoon $x = g(t)$ ja $y = h(t) = f(x)$. Tällöin lauseen 5.21 mukaan on olemassa $\epsilon \simeq 0$ siten, että $\Delta y = f'(x)\Delta x + \epsilon\Delta x$ kaikilla infinitesimaalisilla Δx. Nyt $\Delta x = {}^*g(t + \Delta t) - g(t)$, missä $\Delta t \neq 0$ on infinitesimaalinen, joten $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x)\dfrac{\Delta x}{\Delta t} + \epsilon\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$. Lauseitten 5.17 ja 4.8 nojalla

$$\begin{aligned} h'(t) &= st\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right) = st\left(f'(x)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \epsilon\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) = st\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) + st\left(\epsilon\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) \\ &= st\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) st\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) + 0 = f'(x)g'(t) = f'(g(t))g'(t). \end{aligned}$$

□

Esimerkki 5.2. (a) Olkoon $f(x) = 3x^2 - 5x$. Tällöin

$$\begin{aligned} \frac{{}^*f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{3(x+h)^2 - 5(x+h) - (3x^2 - 5x)}{h} = \frac{6xh + 3h^2 - 5h}{h} \\ &= 6x - 5 + 3h \simeq 6x - 5 \end{aligned}$$

kaikilla $h \simeq 0, h \neq 0$, joten $f'(x) = 6x - 5$.

(b) Merkitään nyt $h = \Delta x$, ja lasketaan lauseen 5.21 avulla infinitesimaalinen ϵ edellisen kohdan funktiolle f. Koska $\Delta y = f'(x)\Delta x + \epsilon \Delta x$, niin

$$\epsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \frac{{}^*f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x) = 6x - 5 + 3\Delta x - (6x - 5) = 3\Delta x.$$

6. YHTEENVETO

Työ alkoi lyhyellä katsauksella infinitesimaalien historiaan. Infinitesimaaleilla on ollut suuri rooli matematiikan historiassa, mutta siitä huolimatta niiden täsmällinen määrittely tapahtui vasta 1960-luvulla. Tässä diplomityössä esiteltiin, miten hyperreaaliluvut voidaan määritellä täsmällisesti, ja tutustuttiin epästandardiin analyysiin. Työn pääasiallisena lähteenä on ollut A. Hurdin ja P. Loebin kirjan *An Introduction to Nonstandard Real Analysis* [1] ensimmäinen luku.

Toisessa luvussa konstruoitiin ultrapotenssimenetelmällä hyperreaalilukujen systeemi, joka sisälsi tavallisten reaalilukujen lisäksi infinitesimaalisia ja äärettömiä lukuja. Lisäksi luotiin homomorfismi, jonka avulla pystyttiin siirtämään matemaattisia objekteja, kuten lukuja, joukkoja ja relaatioita, reaalilukujen puolelta hyperreaalilukujen puolelle.

Kolmannessa luvussa luotiin yksinkertainen kieli, jonka avulla voitiin esittää väittämiä matemaattisista objekteista. Matemaattisille objekteja reaalipuolella koskeva lause voidaan siirtää hyperreaalilukujen puolelle, jolloin syntyy uusi lause, joka käsittelee vastaavia matemaattisia objekteja hyperreaalilukujen puolella. Jos lause on tosi reaalilukujen puolella, niin luvussa esitetyn siirtoperiaatteen mukaan vastaava lause on tosi hyperreaalilukujen puolella.

Neljäs luku käsitteli hyperreaalilukujen ominaisuuksia. Luvussa näytettiin, että sekä infinitesimaalit että äärelliset luvut muodostavat alirenkaan hyperreaalilukujen joukossa. Lisäksi esiteltiin monadin ja galaksin käsitteet, sekä määriteltiin epästandardissa analyysissä erittäin olennainen kaksite infinitesimaalinen läheisyys. Osoitettiin myös, että jokainen hyperreaaliluku on infinitesimaalisen lähellä yksikäsitteistä reaalilukua, ja tutustuttiin tarkemmin hyperkokonaislukujen ja hyperluonnollisten lukujen joukkoihin.

Viidennessä luvussa tutustuttiin epästandardiin analyysiin. Analyysin peruskäsitteille, kuten jonojen suppenemiselle, joukkojen avoimuudelle, funktioiden jatkuvuudelle ja funktioiden derivaatalle esitettiin ja todistettiin perinteisten reaalisten määritelmien kanssa ekvivalentit epästandardit määritelmät. Näiden uusien määritelmien avulla todistettiin esimerkinomaisesti perinteisiä tuloksia.

Epästandardi lähestymistapa ei ole vielä saanut jalansijaa perinteisen analyysin opetuksessa, vaan asiat opetetaan lähes järjestelmällisesti raja-arvon käsitteen kautta. Infinitesimaalien käytössä olisi kuitenkin huomattavia etuja perinteiseen tapaan verrattuna. Ensinnäkin se olisi intuitiivisempaa, ja auttaisi paremmin ymmärtämään opetettavaa asiaa. Infinitesimaalien opettaminen auttaisi myös ymmärtämään paremmin matematiikan historiaa, sillä analyysin perustulokset kehitettiin juuri infinitesimaalien avulla. Lisäksi epästandardi lähestymistapa on usein helpompi ja lyhyempi kuin perinteiset menetelmät.

Usein syy tähän on se, että täsmällinen epästandardi analyysi on vielä suhteellisen tuore haara matematiikan historiassa, ja se on jokseenkin tuntematon alue matemaatikkojen keskuudessa. Tämän diplomityön tavoitteena onkin valottaa tätä aluetta tarjoamalla helposti lähestyttävä ja selkeä johdatus epästandardiin analyysiin. Toiveena on, että lukijalla olisi työn luettuaan hyvä peruskäsitys ja valmius jatkaa opiskelua aiheesta.

LÄHTEET

[1] A.E. Hurd, P.A. Loeb, An Introduction to Nonstandard Real Analysis, Academic Press, 1985, 232 p.

[2] H.J. Keisler, Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach, 2000, 992 p. Saatavissa: https://www.math.wisc.edu/~keisler/calc.html

[3] H.J. Keisler, Foundations of Infinitesimal Calculus, 2007, 213 p. Saatavissa: https://www.math.wisc.edu/~keisler/foundations.html

[4] A. Robinson, H.J. Keisler, S. Körner, W.A. Luxemburg, A.D. Young,Selected Papers of Abraham Robinson - Volume 2 - Nonstandard Analysis and Philosophy, Yale University Press, New Haven, 1979, 582 p.

[5] E.E. Rosinger, Short introduction to Nonstandard Analysis, University of Pretoria, 2004, 197 p. Saatavissa: http://arxiv.org/abs/math/0407178v1

[6] J. Thompson, Matematiikan käsikirja, Tammi, 1994, 439 s.

[7] J.A. Tropp, Infinitesimals:History & Application, University of Texas, 1999, 87 p. Saatavissa: http://users.cms.caltech.edu/~jtropp/papers/Tro99-Infinitesimals.pdf

Liitteet

A. ULTRASUODATIN

Tässä liitteessä todistetaan lause 2.2, eli vapaan ultrasuodattimen olemassaolon jokaiseen äärettömässä joukossa. Todistus on otettu kirjan [1] liitteestä *Ultrafilters*. Aloitetaan esittämällä ultrasuodattimelle, määritelmän 2.1 kanssa yhtäpitävä määritelmä.

Lause A.1. *Joukon I suodatin $\mathcal{F}$ on ultrasuodatin, joss se on maksimaalinen, eli aina kun joukko $\mathcal{G}$ on suodatin joukossa I ja $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, niin $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.*

Todistus. Olkoon suodatin $\mathcal{F}$ ultrasuodatin joukossa I, eli jokaisella osajoukolla $A \subseteq I$ joko $A \in \mathcal{F}$ tai joukon A komplementti $A' = I - A \in \mathcal{F}$. Olkoon joukko $\mathcal{G}$ suodatin joukossa I siten, että $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Valitaan sellainen joukko $B \in \mathcal{G}$, jolla pätee $B \notin \mathcal{F}$. Tällöin komplementti $B' \in \mathcal{F}$, eli $B' \in \mathcal{G}$, joten määritelmän 2.1 kohdan (ii) nojalla $\emptyset = B \cap B' \in \mathcal{G}$, mikä on ristiriidassa kohdan (i) kanssa. Siis ei ole olemassa $B \in \mathcal{G}$, $B \notin \mathcal{F}$, joten $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

Olkoon sitten joukko $\mathcal{F}$ maksimaalinen suodatin, joukko $A \notin \mathcal{F}$ ja joukko $\mathcal{G} = \{X \subseteq I : A \cap F \subseteq X$ jollakin joukolla $F \in \mathcal{F}\}$. Tällöin $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ ja $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}$, koska kaikilla $B \in \mathcal{F}$ pätee $A \cap B \subseteq B$ ja esimerkiksi $A \in \mathcal{G}$. Koska suodatin $\mathcal{F}$ on maksimaalinen, niin joukko $\mathcal{G}$ ei voi olla suodatin. Jos joukot $C, D \in \mathcal{G}$, niin on olemassa joukot $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ siten, että $A \cap F_1 \subseteq C, A \cap F_2 \subseteq D$. Koska joukko $\mathcal{F}$ on suodatin, niin määritelmän 2.1 kohdan (ii) mukaan $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$. Koska $(A \cap F_1) \cap (A \cap F_2) = A \cap (F_1 \cap F_2) \subseteq C \cap D$, niin joukko $C \cap D \in \mathcal{G}$. Jos lisäksi $D \subseteq E$, niin $A \cap F_2 \subseteq D \subseteq E$, eli $E \in \mathcal{G}$. Tällöin jotta joukko G ei olisi suodatin, on oltava $\emptyset \in \mathcal{G}$. Tämä on mahdollista vain, jos $F \subseteq A'$ jollakin $F \in \mathcal{F}$. Mutta koska $\mathcal{F}$ on suodatin, tämä tarkottaa, että $A' \in \mathcal{F}$, mikä edelleen tarkottaa sitä, että $\mathcal{F}$ on ultrasuodatin. $\square$

Todistuksessa käytetään hyväksi Zornin lemmaa.

Lause A.2. *Olkoon $(X, \leq)$ osittain järjestetty joukko. Jos jokaisella ketjulla on yläraja, niin joukolla X on vähintään yksi maksimaalinen alkio.*

Lause A.3. *Jos joukko $\mathcal{F}$ on suodatin joukossa I, niin on olemassa suodattimen $\mathcal{F}$ sisältävä ultrasuodatin $\mathcal{U}$ joukossa I.*

Todistus. Olkoon joukko $\hat{\mathcal{F}}$ kaikkien suodattimen $\mathcal{F}$ sisältävien suodattimien joukko. Joukko $\hat{\mathcal{F}}$ on epätyhjä, sillä $\mathcal{F} \in \hat{\mathcal{F}}$. Struktuuri $(\hat{\mathcal{F}}, \subseteq)$ on osittainen järjestys, sillä inkluusio $\subseteq$ on refleksiivinen, antisymmetrinen ja transitiivinen. Olkoon $\overline{\mathcal{C}}$ ketju joukossa $\hat{\mathcal{F}}$. Näytetään, että joukko $\overline{\mathcal{F}} = \cup_{\mathcal{C} \in \overline{\mathcal{C}}} \mathcal{C}$ on suodatin osoittamalla, että määritelmän 2.1 kohdat (i)-(iii) pätevät.

Tyhjä joukko $\emptyset \notin \overline{\mathcal{F}}$, sillä kaikilla suodattimilla $\mathcal{U}$ pätee $\emptyset \notin \mathcal{U}$. Jos $A, B \in \overline{\mathcal{F}}$, niin $A \in \mathcal{U}_1, B \in \mathcal{U}_2$ joillakin suodattimilla $\mathcal{U}_1$ ja $\mathcal{U}_2$. Koska $\overline{\mathcal{U}}$ on ketju, niin joko $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2$ tai $\mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}_1$. Jos $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2$, niin $A \in \mathcal{U}_2$, eli $A \cap B \in \mathcal{U}_2$, ja edelleen $A \cap B \in \overline{\mathcal{F}}$. Vastaavasti voidaan päätellä tapauksessa $\mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}_1$. Olkoon vielä $B \subseteq C$. Tällöin $C \in \mathcal{U}_2$, ja edelleen $C \in \overline{\mathcal{F}}$.

Koska joukko $\overline{\mathcal{F}}$ on suodatin, niin $\overline{\mathcal{F}} \in \overline{\mathcal{U}}$, ja se on joukon $\overline{\mathcal{U}}$ yläraja. Nyt voidaan päätellä Zornin lemman apuna käyttäen, että joukolla $\hat{\mathcal{F}}$ on maksimaalinen alkio, mikä on siis lauseen A.1 nojalla maksimaalisena suodattimena ultrasuodatin. □

Nyt voidaan todistaa lause 2.1.

Lause A.4. *Jokaisella äärettömällä joukolla on olemassa vapaa ultrasuodatin.*

Todistus. Olkoon I ääretön joukko. Lauseen 2.1 nojalla joukko $\mathcal{F}_I = \{A \subseteq I : I - A \text{ on äärellinen}\}$ on joukon I suodatin nimeltään Fréchetin suodatin. Tällöin lauseen A.3 mukaan on olemassa ultrasuodatin $\mathcal{U}$, mikä sisältää Fréchetin suodattimen, eli ultrasuodatin $\mathcal{U}$ on vapaa. □

B. SIIRTOPERIAATE

Tässä liitteessä todistetaan lauseen 3.1 siirtoperiaate. Todistus on otettu kirjan [1] kappaleesta I.15. Aloitetaan urakka liittämällä jokaiseen kielen $L_{*\mathcal{R}}$ vakiotermiin jono kielen $L_{\mathcal{R}}$ vakiotermejä. Merkitään vakiotermiä τ vastaavaa jonoa symbolilla $T_\tau = \langle T_\tau(n) \rangle$, ja määritellään se seuraavasti.

Määritelmä B.1. Määritellään induktiivisesti jono $T_\tau = \langle T_\tau(n) \rangle$ jokaiselle kielen $L_{*\mathcal{R}}$ vakiotermille τ.

(i) Valitaan jokaista lukua $r \in {}^*\mathbb{R}$ kohti jokin jono $\langle r_n \rangle$ joukosta $\mathbb{R}$ siten, että $r = [\langle r_n \rangle]$. Jos $r \in \mathbb{R}$, niin valitaan $r_n = r$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Jos $\underline{c}$ on vakiosymboli, joka nimeää luvun r, niin asetetaan $T_{\underline{c}}(n) = \underline{r}_n$, missä $\underline{r}_n$ nimeää alkion $r_n \in \mathbb{R}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Olkoon $\tau = {}^*\underline{f}(\tau^1, \ldots, \tau^k)$ termi, missä $\underline{f}$ nimeää funktion f, missä on k muuttujaa, ja τ^i on vakiotermi kaikilla $i \in [1, k]$. Tällöin

$$T_\tau(n) = \underline{f}(T_{\tau^1}(n), \ldots, T_{\tau^K}(n)).$$

Lause B.1. *(i) Olkoon τ vakiotermi kielessä $L_{*\mathcal{R}}$ ja $\langle r_n \rangle$ reaalilukujono. Tällöin τ on tulkittavissa struktuurissa ${}^*\mathcal{R}$ ja nimeää alkion $[\langle r_n \rangle]$, joss $T_\tau(n)$ on tulkittavissa lähes kaikkialla ($\{i \in \mathbb{N} : T_\tau(i)$ on tulkittavissa$\} \in \mathcal{U}$) ja $T_\tau(i)$ nimeää alkion r_i l.k. ($\{i \in \mathbb{N} : T_\tau(i)$ nimeää alkion $r_i\} \in \mathcal{U}$).*

(ii) Olkoon $\tau^1, \ldots, \tau^k$ vakiotermejä ja ${}^*\underline{P}\langle \tau^1, \ldots, \tau^k \rangle$ lause kielessä $L_{*\mathcal{R}}$. Tällöin ${}^*\underline{P}\langle \tau^1, \ldots, \tau^k \rangle$ on tosi struktuurissa ${}^*\mathcal{R}$, joss $\underline{P}\langle T_{\tau^1}(i), \ldots, T_{\tau^k}(i) \rangle$ on tosi l.k. ($\{i \in \mathbb{N} : \underline{P}\langle T_{\tau^1}(i), \ldots, T_{\tau^k}(i) \rangle$ on tosi struktuurissa $\mathcal{R}\} \in \mathcal{U}$).

Todistus. (i) Todistetaan induktiivisesti määritelmän 3.3 kohdat.

- Olkoon $\tau = \underline{c}$, missä $\underline{c}$ on vakiosymboli, joka nimeää jonkin joukon ${}^*\mathbb{R}$ alkion. Tällöin $\underline{c}$ nimeää luvun $[\langle r_n \rangle]$, joss $T_{\underline{c}}(n)$ nimeää luvun r_n l.k.

- Olkoon $\tau = {}^*\underline{f}(\tau^1, \ldots, \tau^k)$ missä $\underline{f}$ nimeää funktion f, jolla on k muuttuujaa, ja $\tau^1, \ldots, \tau^k$ ovat vakiotermejä, joille (i) on tosi, eli kaikilla $j \in [1, k]$ jono $\langle r_n^j \rangle, r_n^j \in \mathbb{R}, \tau^j$ on tulkittavissa struktuurissa ${}^*\mathcal{R}$ ja nimeää alkion $[\langle r_n^j \rangle]$, joss $T_{\tau^j}(n)$ tulkittavissa l.k. ja nimeää luvun r_n^j l.k. Olkoon $\langle s_n \rangle$ jono joukossa $\mathbb{R}$. Tällöin seuraavat lausekkeet ovat yhtäpitäviä.

  (a) Termi $\tau = {}^*\underline{f}(\tau^1, \ldots, \tau^k)$ on tulkittavissa struktuurissa ${}^*\mathcal{R}$, ja nimeää luvun $[\langle s_n \rangle]$.

  (b) On olemassa luvut $[\langle r_n^1 \rangle], \ldots, [\langle r_n^k \rangle] \in {}^*\mathbb{R}$ siten, että kaikilla $j \in [1, k]$ τ^j on tulkittavissa alkioksi $[\langle r_n^j \rangle]$, k-jono $\langle [\langle r_n^1 \rangle], \ldots, [\langle r_n^k \rangle] \rangle$ kuuluu funktion ${}^*f$ määrittelyjoukkoon ja ${}^*f([\langle r_n^1 \rangle], \ldots, [\langle r_n^k \rangle]) = [\langle s_n \rangle]$.

  (c) On olemassa jono $\langle r_n^1 \rangle, \ldots, \langle r_n^k \rangle$ joukossa $\mathbb{R}$ siten, että

  $$\{i \in \mathbb{N} : \forall j \in [1, k] : T_{\tau^j}(i) \text{ on tulkittavissa alkioksi } r_i^j \\ \wedge \langle r_i^1, \ldots, r_i^j \rangle \in dom(f) \wedge f(r_i^1, \ldots, r_i^j) = s_i\} \in \mathcal{U}.$$

  (d) $\underline{f}(T_{\tau^1}(n), \ldots, T_{\tau^k}(n))$ on tulkittavissa l.k. alkioksi s_n struktuurissa $\mathcal{R}$.

  (e) $T_\tau(n)$ on tulkittavissa l.k. alkioksi s_n struktuurissa $\mathcal{R}$.

(ii) Olkoon $\underline{P}$ k-paikkaisen joukon $\mathbb{R}$ relaation P nimi ja $\tau^1, \ldots, \tau^k$ vakiotermejä kielessä $L_{^*\mathcal{R}}$. Tällöin seuraavat lauseet ovat yhtäpitäviä.

  (a) ${}^*\underline{P}\langle \tau^1, \ldots, \tau^k \rangle$ on tosi struktuurissa ${}^*\mathcal{R}$.

  (b) On olemassa luvut $[\langle r_n^1 \rangle], \ldots, [\langle r_n^k \rangle] \in {}^*\mathbb{R}$ siten, että kaikilla $j \in [1, k]$ τ^j on tulkittavissa alkioksi $[\langle r_n^j \rangle]$ ja ${}^*P\langle [\langle r_n^1 \rangle], \ldots, [\langle r_n^k \rangle] \rangle$.

  (c) On olemassa jono $\langle r_n^1 \rangle, \ldots, \langle r_n^k \rangle$ joukossa $\mathbb{R}$ siten, että

  $$\{i \in \mathbb{N} : \forall j \in [1, k] : T_{\tau^j}(i) \text{ on tulkittavissa alkioksi } r_i^j \wedge P\langle r_i^1, \ldots, r_i^j \rangle\} \in \mathcal{U}.$$

  (d) $\underline{P}\langle T_{\tau^1}(n), \ldots, T_{\tau^k}(n) \rangle$ on tosi l.k. struktuurissa $\mathcal{R}$.

$\square$

Nyt voidaan todistaa siirtoperiaate (lause 3.1). Jos Φ on lause muotoa $\underline{P}\langle \tau^1, \ldots, \tau^n \rangle$, niin lauseesta $B.1$ seuraa suoraan, että jos Φ on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$, niin lause ${}^*\Phi$ on tosi struktuurissa ${}^*\mathcal{R}$. Olkoon sitten Φ lause muotoa

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_n)[\wedge_{i=1}^k \underline{P}_i \langle \tau_1^i, \ldots, \tau_{m_i}^i \rangle \to \wedge_{j=1}^l \underline{Q}_j \langle \delta_1^j, \ldots, \delta_{n_j}^j \rangle],$$

joka on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$. Olkoon ${}^*\tau_s^t$ ja ${}^*\delta_s^t$ termien τ_s^t ja δ_s^t *-siirrot. Korvataan muuttujat $x_1, \ldots, x_n$ termeissä ${}^*\tau_s^t$ ja ${}^*\delta_s^t$ kielen $L_{{}^*\mathcal{R}}$ vakiosymboleilla $\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_n$ ja oletetaan, että ${}^*\underline{P}_i\langle {}^*\tau_1^i, \ldots, {}^*\tau_{m_i}^i\rangle$ on tosi struktuurissa ${}^*\mathcal{R}$ jokaisella $i \in [1, k]$. Lauseesta $B.1$ nähdään, että

$$\{i \in \mathbb{N} : \forall j \in [1, k] : \underline{P}_j\langle T_{\tau_1^j}(i), \ldots, T_{\tau_{m_j}^j}(i)\rangle \text{ on tosi struktuurissa } \mathcal{R}\} \in \mathcal{U}.$$

Koska Φ on tosi struktuurissa $\mathcal{R}$, niin

$$\{i \in \mathbb{N} : \forall j \in [1, l] : \underline{Q}_j\langle T_{\delta_1^j}(i), \ldots, T_{\delta_{n_j}^j}(i)\rangle \text{ on tosi struktuurissa } \mathcal{R}\} \in \mathcal{U}.$$

Tällöin lauseen $B.1$ nojalla ${}^*\underline{Q}_j\langle {}^*\delta_1^j, \ldots, {}^*\delta_{n_j}^j\rangle$ on tosi struktuurissa ${}^*\mathcal{R}$ jokaisella $j \in [1, l]$, joten siirtoperiaate on todistettu.